UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

De Doctorat D'Etat Es Sciences Mathematiques

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES

par

Bruno SCHEURER

Sujet de la Thèse : - Etude de problèmes non linéaires en calcul des variations et en génétique des populations.

- Prolongement unique pour des opérateurs elliptiques.
- Perturbation singulière d'opérateurs elliptique-hyperbolique.

Soutenue le 25 juin 1981 *devant le Jury composé de* :

MM. R. DAUTRAY — Président

C. BARDOS
G. GEYMONAT
J. GINIBRE
J. SJÖSTRAND
L. TARTAR
R. TEMAM

— Examinateurs

UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

De Doctorat D'Etat Es Sciences Mathematiques

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES

par

Bruno SCHEURER

Sujet de la Thèse : - Etude de problèmes non linéaires en calcul des variations et en génétique des populations.

- Prolongement unique pour des opérateurs elliptiques.
- Perturbation singulière d'opérateurs elliptique-hyperbolique.

Soutenue le 25 juin 1981 *devant le Jury composé de* :

MM. R. DAUTRAY — Président

C. BARDOS
G. GEYMONAT
J. GINIBRE
J. SJÖSTRAND
L. TARTAR
R. TEMAM
— Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A Caroline

REMERCIEMENTS

Je remercie tout particulièrement R. TEMAM, qui m'a accueilli dans son équipe, pour ses conseils et ses encouragements constants, surtout dans des passes difficiles, à mener à bien ce travail.

Je suis très reconnaissant à Monsieur R. DAUTRAY, Directeur Scientifique, de m'avoir montré l'intérêt de la géométrie différentielle en physique mathématique et qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Je remercie J. SJÖSTRAND, dont le cours m'a initié aux équations aux dérivées partielles linéaires, G. GEYMONAT, C. BARDOS et L. TARTAR d'avoir accepté de faire partie du jury.

Monsieur J. GINIBRE m'a proposé un sujet de seconde thèse très stimulant et m'a guidé par des conversations fructueuses, je l'en remercie vivement.

Ma reconnaissance va également à Monsieur GUILLOUD, chef du Service de Mathématiques Appliquées du Centre d'Etudes de Limeil, Messieurs LASCAUX et DUMONT, qui m'ont apporté toutes facilités pour effectuer ce travail, et à J.C. NEDELEC pour son accueil durant un an au Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique.

Toute ma gratitude va aussi à mes camarades du Laboratoire d'Analyse Numérique d'Orsay, du service M.A. du C.E.L. Jean-Claude SAUT m'a beaucoup apporté au cours de notre travail en commun : les conseils d'Alain LICHNEWSKY ont été très utiles.

Mes remerciements s'adressent enfin à Madame MAYNARD et au secrétariat du service M.A. pour la gentillesse et la compétence apportées à la réalisation pratique de ce texte.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547326_0018

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

I - Etudes de problèmes non linéaires en calcul des variations et en génétique des populations

1) Régularité des solutions d'un problème fondamental du calcul des variations et applications

2) Existence et approximation de points selles pour certains problèmes non linéaires

3) Remarks on a non linear equation arising in population genetics

II - Prolongement unique pour des opérateurs elliptiques

1) Un théorème de prolongement unique pour des opérateurs elliptiques dont les coefficients ne sont pas localement bornés

2) Sur l'unicité du problème de Cauchy et le prolongement unique pour des équations elliptiques à coefficients non localement bornés

III - Perturbation singulière d'opérateurs elliptique-hyperbolique

1) Sur une perturbation singulière d'opérateurs différentiels elliptique-hyperbolique

Introduction

I - Etude de problèmes non linéaires en calcul des variations et en génétique des populations

1) "Régularité des solutions d'un problème fondamental du calcul des variations et application"
(Bull. UMI 13 (1976), 160-190)

On étudie la régularité des solutions du problème

$$(1) \quad \mathrm{Inf}\left\{ \int f(x, u, u_x)\, dx \;\middle|\; u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega,\ u \in W^{1,\alpha}(\Omega) \right\},$$

Ω ouvert borné de R^n $(n > 1)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $1 < \alpha < \infty$. On considère le cas d'une intégrande normale, convexe et vérifiant une condition de croissance naturelle. On montre alors que la norme dans $L^\infty(\Omega)$ de toute solution est majorée par une constante dépendant seulement des données du problème, en particulier de la norme dans $L^\infty(\Omega)$ de u_0. Pour des intégrandes indépendantes de u et une donnée u_0 satisfaisant la condition de pente bornée, on montre ensuite que certaines solutions sont lipschitziennes. Ces résultats précisent la régularité des solutions des problèmes relaxés en calcul des variations.

2) "Existence et approximation de points selles pour certains problèmes non linéaires"
(RAIRO, Analyse Numérique, 11 (1977), 369-400)

On étudie les inéquations variationnelles correspondant à des contraintes linéaires égalités ou inégalités, pour des opérateurs monotones fortement non linaires. On montre, sous une hypothèse naturelle sur la contrainte, que leur résolution est équivalente à celle de problèmes de points selles. On utilise à cet effet les techniques de dualité en calcul des variations et un théorème du type Kuhn-Tücker en dimension infinie. On obtient ainsi un cadre assez large pour les méthodes mixtes et hybrides d'éléments finis et on généralise alors au cas non linéaire des résultats de F. Brezzi, P.A. Raviart, J.M. Thomas. Ce cadre est bien adapté à l'approxiation de ces problèmes

de points selles et permet la démonstration de résultats de stabilité et de convergence, ce que nous détaillons. Ces résultats sont appliqués aux problèmes de l'obstacle, d'éléments finis mixtes et hybrides, de Stokes.

3) "Remarks on a non linear equation arising in population genetics", en collaboration avec J.C. Saut"
(Comm. in P.d.e. 3 (1978), 907-931)

On s'intéresse à des problèmes du type :

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta u + \lambda F(x, u) = 0 & \text{dans } \Omega \text{ ouvert borné de } R^n, \ \lambda \geq 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial n} u \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

La fonction F ne vérifie aucune hypothèse de signe, n'est pas régulière en x et satisfait $F(.,0) \equiv F(.,1) \equiv 0$. On cherche des solutions (λ,u) où $0 \leq u(x) \leq 1$ (u représente une fréquence de population). Nous explicitons complètement, pour une grande classe de non linéarités et en dimension quelconque la structure de l'ensemble des solutions de (2) au voisinage de $\lambda = 0$. Pour ce faire, on utilise la méthode de Lyapounov Schmidt. L'équation de bifurcation obtenue est étudiée à l'aide de méthodes différentielles, notamment le lemme de Morse et le théorème de k-détermination de Mather. Nous pouvons alors dénombrer les branches non triviales, sous certaines conditions intégrales sur F.

Enfin une estimation (qui semble nouvelle) sur la première valeur propre de

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta u + \lambda r(x)u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

où $r \in L^\infty(\Omega)$ et ne vérifie aucune hypothèse de signe, précise la première valeur λ_1, de bifurcation à partir de la branche $u \equiv 0$ ou $u \equiv 1$ pour le problème (2).

II - Prolongement unique pour des opérateurs elliptiques

1) "Un théorème de prolongement unique pour des opérateurs elliptiques dont les coefficients ne sont pas localement bornés", en collaboration avec J.C. Saut
(C.R. Acad. Sc. Paris 290 (1980), 595-598)

2) "Sur l'unicité du problème de Cauchy et le prolongement unique pour des équations elliptiques à coefficients non localement bornés", en collaboration avec J.C. Saut,
(à paraître au J. Diff. Equ.).

On considère $P(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha$, opérateur uniformément elliptique d'ordre $m \geq 2$ à coefficients réels, dans un ouvert connexe de R^n, $n \geq 2$. La partie principale de $P(x,D)$ est supposée à coefficients dans $C^1(\bar{\Omega})$ et à caractéristiques complexes simples. On étudie la propriété de prolongement unique de $P(x,D)$:

(4) $u \in H^m_{loc}(\Omega)$ solution de $P(x,D)u = 0$ et $u = 0$ dans un ouvert non vide de $\Omega \Rightarrow u = 0$ dans Ω.

Nous montrons que cette propriété (bien connue lorsque

$a_\alpha \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, $|\alpha| \leq m-1$) est encore satisfaite lorsque

$a_\alpha \in L^{q_k}_{loc}(\Omega)$, $|\alpha| = k$, $0 \leq k \leq m-1$. Les coefficients q_k sont définis explicitement par récurrence.

L'étape essentielle de la démonstration est la mise en évidence d'une inégalité de Carleman en norme L^q, $q \neq 2$, pour $P(x,D)$. Pour ce faire nous partons des inégalités classiques en norme L^2 et utilisons des arguments d'interpolation et une récurrence convenable. Notre méthode permet également de traiter le cas d'opérateurs

elliptiques à caractéristiques complexes multiples. Ces résultats sont en particulier utiles pour appliquer des techniques de transversalité dans des problèmes elliptiques non linéaires. Cela répond partiellement à une conjecture de B. Simon, M. Schechter et recoupe des travaux de A-M. Berthier, V. Georgescu.

III - Perturbation singulière d'opérateurs elliptique-hyperbolique

"Sur une perturbation singulière d'opérateurs différentiels elliptique-hyperbolique"
(à paraître aux Comm. in P.d.e.)

On étudie une perturbation singulière de l'équation de type mixte (elliptique-hyperbolique) de Tricomi :

$$(5) \qquad (X_2 D_1^2 + D_2^2)\, u = F,$$

qui est considérée ici comme un modèle simplifié des équations des écoulements transsoniques. L'équation perturbée est de type elliptique-parabolique.

$$(6) \qquad (X_2 D_1^2 + D_2^2)\, u + \nu \theta(X_2)\, (D_1^4 + 2i\, D_1^2\, D_2)\, u = F,$$

l'opérateur étant inchangé dans la région elliptique et donc modifié dans la seule région hyperbolique par adjonction du terme parabolique. Dans (6), ν est un paramètre positif et $\theta(X_2)$ une fonction nulle lorsque $X_2 \geq 0$. Cette régularisation est suggérée par les travaux numériques de E.M. Murman, J.D. Cole et A. Jameson qui sont bien connus dans l'analyse numérique des fluides transsoniques.

Envisageant la résolution de (6) et (7) au sens des distributions dans un ouvert Ω de R^2 coupant l'axe $X_2 = 0$, on précise, selon la régularité de θ, comment le problème (6) approxime le problème (5) lorsque $\nu \to 0$. Une suite extraite de solutions de (6) converge

faiblement dans un espace de Sobolev convenable vers une solution de (5). Cela donne un début de justification des algorithmes de Murman-Cole-Jameson. L'étape principale de la démonstration consiste à obtenir des inégalités de Carleman-Hörmander pour les opérateurs définis par (5) et (6). Cette approche nous permet en fait d'envisager, pour les équations non perturbées, une large classe d'opérateurs elliptique-hyperbolique généralisant celui de Tricomi et la régularisation parabolique naturelle associée : les démonstrations sont faites d'emblée dans ce cadre général.

Bollettino U. M. I.
(5) 13-B (1976), 160-190

Régularité des solutions d'un problème fondamental du calcul des variations et application.

BRUNO SCHEURER (Orsay, France)

Sunto. – *Si studia la regolarità delle soluzioni u del problema*

$$\mathrm{Inf}\left\{\int_\Omega f(x, u, u_x)\,dx \mid u = u_0 \text{ su } \partial\Omega,\ u \in W^{1,x}(\Omega)\right\},$$

dove Ω è un aperto limitato di $\boldsymbol{R}^n$ avente una frontiera regolare e x indica un intero, $1 < x < \infty$. Si suppone solamente che f sia un'integranda normale convessa e soddisfi un'ipotesi di crescenza naturale. Si dimostra che ogni soluzione è maggiorabile in $L^\infty(\Omega)$ mediante una costante non dipendente che dai dati del problema, in particolare da u_0. Sotto un'ipotesi sull'aperto Ω e sul dato al contorno u_0, si studia la questione della continuità delle soluzioni su Ω. Tali risultati precisano le proprietà delle soluzioni del problema rilassato associato ad un problema non convesso del calcolo delle variazioni.

Introduction.

Nous nous intéressons ici à la régularité des solutions d'un problème fondamental du calcul des variations en dimension $n > 1$:

$$\mathrm{Inf}\left\{\int_\Omega f(x, u, u_x)\,dx \mid u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega,\ u \in W^{1,x}(\Omega)\right\}. \tag{1}$$

La régularité des solutions du problème (1) a été principalement étudiée sous les hypothèses suivantes: f est une intégrande de classe C^2 au moins en u_x, strictement convexe et de croissance polynomiale en u, u_x: On sait alors que les solutions ont le degré de régularité de f.

L'objet de ce travail est d'étudier la régularité des solutions du problème (1) lorsque l'intégrande est peu régulière, à savoir lorsque f est une intégrande normale convexe. C'est l'hypothèse minimum pour que le critère minimisé ait un sens et assurer l'existence d'au moins une solution. La difficulté principale est alors qu'il n'est

plus possible de caractériser les solutions par l'équation d'Euler associé au problème (1), ni d'étudier ainsi les propriétés locales des solutions. Nous travaillons donc directement sur la caractérisation première d'une solution de (1):

$$\int_{\Omega} f(x, u, u_x)\, dx \leq \int_{\Omega} f(x, v, v_x)\, dx \tag{2}$$

pour tout v admissible.

Le plan de ce travail est le suivant.

Dans une première Partie, nous étudions l'existence des solutions du problème (1). Nous rappelons ainsi pour la commodité du lecteur, un certain nombre de définitions et résultats (d'après EKELAND-TEMAM [1]).

Dans une deuxième Partie, nous mettons en évidence un principe du maximum: la norme dans $L^\infty(\Omega)$ de toute solution est majorée par une constante qui ne dépend que des données du problème et la norme dans $L^\infty(\Omega)$ de la donnée au bord u_0. La méthode a pour point de départ l'inégalité (2); elle utilise un procédé de troncature et une généralisation d'un critère intégral de LADYZENSKAJA-URALCEVA [7].

Dans une troisième Partie, nous étudions la continuité des solutions. Dans le cas où $\alpha > n$, cela résulte des théorèmes classiques d'immersion. Dans le cas où $\alpha = n$, une étude directe est possible grâce à l'introduction des coordonnées polaires dans R^n. Dans le cas où $\alpha < n$, nous régularisons f de façon convenable et utilisons un résultat de Stampacchia. Les résultats sont énoncés dans le cas d'une hypothèse un peu plus forte sur f: celle-ci est une intégrande de Carathéodory qui ne dépend pas de u. Nous supposons également que u_0 satisfait la condition de pente bornée (B.S.C). Nous soulignons, par un contre exemple, que cette méthode ne permet pas de démontrer la continuité lipschitzienne de *toutes* les solutions.

Enfin dans une quatrième Partie, nous donnons une application des résultats de ce travail, qui est d'ailleurs une de ses motivations essentielles. Il s'agit de la relaxation des problème non convexes du Calcul des variations. Nos résultats permettent de préciser *la régularité des solutions des problèmes relaxés*. Les définitions et résultats de EKELAND-TEMAM [1] sont rappelés, puis les principaux résultats énoncés comme corollaires des théorèmes des Parties 2 et 3.

Je tiens à remercier tout particulièrement M. Temam qui m'a suggéré l'objet de ce travail et m'a encouragé constamment dans sa poursuite. Je remercie également M. Ekeland pour les intéressantes discussions que j'ai pu avoir avec lui.

Table des matières.

1-ère Partie: *Existence et convexité de l'ensemble des solutions.*
1. Rappels.
2. Existence et convexité.

2-ème Partie: *Principe du maximum.*
1. Lemmes préliminaires.
2. Estimation à priori du module des solutions.
3. Autres résultats.

3-ème Partie: *Continuité des solutions.*
1. Le cas $\alpha > n$.
2. Le cas $\alpha = n$.
3. Le cas $\alpha < n$.

4-ème Partie: *Application: la relaxation en calcul des variations.*
1. Rappels.
2. Enoncé des résultats.

Notations.

Dans tout ce qui suit Ω désignera un ouvert borné de R^n de frontière « régulière », par exemple lipschitzienne.

Pour toute fonction de $L^\alpha(\Omega)$, on notera:

$$\|u\|_\alpha = \left(\int_\Omega |u(x)|^\alpha dx\right)^{1/\alpha} \quad \text{si } 1 \leqslant \alpha < \infty$$

$$\|u\|_\infty = \sup_\Omega \text{ess. } |u(x)| \quad \text{si } \alpha = \infty$$

$$\|u\|_{\alpha,A} = \left(\int_A |u(x)|^\alpha dx\right)^{1/\alpha} \quad \text{lorsqu'on voudra préciser le domaine d'intégration.}$$

On notera $C^{0,\eta}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions höldériennes (ou lipschitziennes si $\eta = 1$) muni de la norme

$$|u|_{\eta,\Omega} = \|u\|_\infty + \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\eta}.$$

$|A|$ désignera la mesure au sens de Lebesgue de $A \subset R^n$.

Enfin, dans un contexte donné, on appellera fonction admissible une fonction appartenant à l'espace sur lequel on minimise la fonctionnelle considérée.

1ère Partie

EXISTENCE ET CONVEXITÉ DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS

1. – Rappels.

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques définitions et propriétés qui seront constamment utilisées dans tout ce qui suit ainsi que le théorème fondamental de semi continuité inférieure. Les résultats sont énoncés sans démonstrations; pour celles-ci nous renvoyons à EKELAND-TEMAM [1].

DÉFINITION 1.1. – Si B est un borélien de R^p, une application f de $\Omega \times B$ dans R est appelée une intégrande normale si:

(i) pour presque tout $x \in \Omega$ $f(x, \cdot)$ est SCI sur B;

(ii) il existe une fonction $\tilde{f}: \Omega \times B \to R$, borélienne, telle que

$$\tilde{f}(x, \cdot) = f(x, \cdot), \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega .$$

Si f est une intégrande normale de $\Omega \times R \times R^n$ dans $\bar{R}$, il résulte de cette définition que la fonction $x \to f(x, u(x), v(x))$ est mesurable sur Ω pour tous u, v mesurables. Si $u \in W^{1,x}(\Omega)$ alors $x \to f(x, u(x), u_x(x))$ est mesurable (B est ici un borélien de $R \times R^n$). Il est remarquable que cette propriété n'est plus vraie si f est seulement mesurable en x et SCI sur $R \times R^n$. Un exemple classique d'intégrande normale est constitué par les fonctions de Carathéodory (c'est-à-dire les fonctions mesurables en x et continues sur $R \times R^n$). Plus précisément:

DÉFINITION 1.2. – Soit B un borélien de R^p. Une application $f: \Omega \times B \to \bar{R}$ est dite de Carathéodory si:

(i) pour presque tout $x \in \Omega$ $f(x, \cdot)$ est continue sur B;

(ii) pour tout $a \in B$, $f(\cdot, a)$ est mesurable sur Ω.

PROPOSITION 1.1. – *Toute fonction de Carathéodory est une intégrande normale.*

Un des intérêts majeurs des intégrandes normales est le théorème de semi continuité inférieure suivant satisfait sous une hypothèse de coercivité simple:

THÉORÈME 1. – *Soit f une intégrande normale de $\Omega\times R\times R^n$ telle que:*

(i) $\Phi(|p|) \leq f(x, u, p) \quad \forall (x, u, p)\in\Omega\times R\times R^n$ *où* $\Phi: R^+\to R^+$ *est convexe croissante* SCI *et telle que:* $\lim_{t\to+\infty}\Phi(t)/t = +\infty$;

(ii) $\forall (x, u)\in\Omega\times R$ $f(x, u, \cdot)$ *est convexe sur* R^n.

Soient $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergeant faiblement vers $\overline{p}$ dans $[L^1(\Omega)]^n$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers $\overline{u}$.

$$\int_\Omega f(x, \overline{u}(x), \overline{p}(x))\,dx \leq \varliminf_{n\to+\infty}\int_\Omega f(x, u_n(x), p_n(x))\,dx\,.$$

2. – Existence et convexité.

Nous précisons ici sous quelles hypothèses les solutions du problème:

$$\mathrm{Min}\left\{\int_\Omega f(x, u, u_x)\,dx \,|\, u\in W^{1,\alpha}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$$

existent ainsi que la nature de l'ensemble de ces solutions.

PROPOSITION 1.2. – *Soit Ω un ouvert borné de R^n.*

Soit $f: \Omega\times R\times R^n\to R$ une intégrande normale convexe en la variable p de R^n telle que:

(1.1) $a_2(x) - |p|^\alpha \leq f(x, u, p)$ avec $a_2\in L^1(\Omega)$ $\quad 1<\alpha<+\infty$.

Soit u_0 un élément de $W^{1,\alpha}(\Omega)$ avec $1<\alpha<\infty$ tel que:

$$\int_\Omega f(x, u_0, u_{0x})\,dx < +\infty\,. \tag{1.2}$$

Alors le problème:

$$\mathrm{Min}\left\{\int_\Omega f(x, u, u_x)\,dx \,|\, u\in W^{1,\alpha}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$$

admet des solutions et l'ensemble S des solutions est fermé dans $W^{1,\alpha}(\Omega)$. Si de plus l'intégrande f est de la forme:

$f(x, u_x)$ ou $f(x, u_x) + g(x, u)$

avec $p\to f(x, p)$ et $u\to g(x, u)$ convexes

l'ensemble S des solutions est convexe.

PREUVE. –

1) Considérons la fonctionnelle:

$$F: u \to \int_\Omega f(x, u, u_x)\, dx\,.$$

Elle est convexe, f étant convexe par définition. Puisque $-\infty < F(u)$ et $F(u_0) < +\infty$ (d'après les hypothèses (1.1) et (1.2)), l'infimum:

$$d = \mathrm{Inf}\{F(v) \mid v \in W^{1,z}(\Omega),\ v = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad \text{est un nombre réel.}$$

Soit $\{u_n\}_{n\in N}$ une suite minimisante de fonctions admissibles:

$$d_n = F(u_n) \to d \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

De l'hypothèse (1.1) il résulte que:

$$\|u_{nx}\|_z \leqslant \mathrm{Cste}$$

puis grâce à l'inégalité de Poincaré:

$$\|u_n\|_z \leqslant \mathrm{Cste}\,.$$

La suite minimisante $\{u_n\}_{n\in N}$ est donc bornée dans $W^{1,z}(\Omega)$. On peut alors, par compacité, extraire une sous suite encore notée $\{u_n\}$ faiblement convergente dans $W^{1,z}(\Omega)$ et fortement convergente dans $L^z(\Omega)$ vers une fonction u de $W^{1,z}(\Omega)$. En particulier:

$$u_n \to u \quad p\cdot p \text{ dans } \Omega$$
$$u_{nx} \to u_x \quad \text{faiblement dans } [L^z(\Omega)]^n\,.$$

D'après le théorème 1.1 (nous avons ici $\Phi(t) = t^z$) il en résulte alors:

$$F(u) \leqslant \lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \lim_{n\to+\infty} d_n = d\,.$$

Par conséquent, d'après la définition de d, u est solution.

2) L'intégrande f n'est pas en général strictement convexe; F ne l'est donc également pas. *Il n'y a donc pas unicité de la solution.* Soit S l'ensemble des solutions. Grâce au théorème 1.1, nous savons que F est SCI pour la topologie faible de $W^{1,z}(\Omega)$; S est donc fermé dans $W^{1,z}(\Omega)$. L'ensemble S n'est pas en général convexe.

Faisons l'hypothèse supplémentaire: l'intégrande se décompose en une partie ne dépendant que de x et p et une partie éventuellement identiquement nulle ne dépendant que de x et u. Nous

considérons donc des intégrandes du type:

$$(x, u, p) \to f(x, p) + g(x, u) \quad \text{où} \quad p \to f(x, p) \quad \text{et} \quad u \to g(x, u)$$

sont des fonctions convexes et nous examinons l'ensemble des solutions du problème:

$$\operatorname{Min}\left\{\int_\Omega f(x, u_x)\,dx - \int_\Omega g(x, u)\,dx \,|\, u \in W^{1,x}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}.$$

Soient alors u_1 et u_2 deux éléments de S et λ, μ deux réels non négatifs de somme 1. Grâce à la convexité de $p \to f(x, p)$ et $u \to -g(x, u)$, nous avons alors:

$$F(\lambda u_1 + \mu u_2) = \int_\Omega f(x, (\lambda u_1 + \mu u_2)_x)\,dx - \int_\Omega g(x, \lambda u_1 + \mu u_2)\,dx$$
$$\leqslant \lambda \int_\Omega f(x, u_{1x})\,dx + \mu \int_\Omega f(x, u_{2x})\,dx + \lambda \int_\Omega g(x, u_1)\,dx + \mu \int_\Omega g(x, u_2)\,dx.$$

Soit en regroupant:

$$F(\lambda u_1 + \mu u_2) \leqslant \lambda\left[\int_\Omega f(x, u_{1x})\,dx + \int_\Omega g(x, u_1)\,dx\right] +$$
$$+ \mu\left[\int_\Omega f(x, u_{2x})\,dx + \int_\Omega g(x, u_2)\,dx\right].$$

Finalement puisque u_1 et u_2 appartiennent à S:

$F(\lambda u_1 + \mu u_2) \leqslant \lambda d + \mu d = d$; $\lambda u_1 + \mu u_2$ appartient donc à S.

C'est dire que S est convexe. ∎

2-ème Partie

PRINCIPE DU MAXIMUM

1. – Lemme préliminaire.

Voici un critère intégral, généralisant celui de Ladyzenskaja-Uralceva [7], que nous utiliserons de façon essentielle.

Lemme 2.1. – *Soit u une fonction intégrable sur Ω, vérifiant pour*

tout $k \geqslant k_0 \geqslant 0$ *l'inégalité intégrale*:

$$\int_{A(k)} (u-k)\,dx \leqslant c(1-k)|A(k)|^{\eta} \tag{2.1}$$

où $A(k)$ *est l'ensemble des* x *de* Ω *où* $u(x) > k$, *tandis que* c *et* η *sont des constantes telles que* $c > 0$ *et* $\eta > 1$. *Notamment,* c *ne dépend pas de* k. *Alors* $u(x) \leqslant k_0 + C$ *presque partout sur* Ω, *où* C *est une constante ne dépendant que de* c, η *et* Ω.

PREUVE. – Quitte à remplacer u par $u - k_0$ et k par $k - k_0$ on peut toujours supposer que $k_0 = 0$. Posons $H(k) = \int_{A(k)} (u-k)\,dx = -\int_k^{\infty} (t-k)\,d|A(t)|$ pour $k > 0$. L'existence de la seconde intégrale implique compte tenu de la décroissance de la fonction $t \to |A(t)|$ que $\lim_{t \to +\infty} t|A(t)| = 0$. Il est alors clair qu'en intégrant par parties:

$$H(k) = \int_k^{\infty} |A(t)|\,dt \qquad \text{d'où il résulte que } H'(k) = -|A(k)|\,.$$

L'inégalité intégrale (2.1) prend alors la forme:

$$H(k) \leqslant c(1-k)(-H'(k))^{\eta}\,.$$

Posons $k_{\text{Max}} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}\cdot u(x)$ et intégrons cette inégalité de 0 à k_{Max} (nous avons $H(k) \neq 0$ pour k tel que $0 \leqslant k < k_{\text{Max}}$), nous obtenons:

$$H(k_{\text{Max}})^{1-1/\eta} - H(0)^{1-1/\eta} \leqslant -c^{-1/\eta}(1-k_{\text{Max}})^{1-1/\eta} + c^{-1/\eta}$$

d'où puisque $H(k_{\text{Max}}) = 0$, l'évaluation suivante de k_{Max}:

$$k_{\text{Max}} \leqslant C_1 \quad \text{où} \quad C_1 = [c^{1/\eta} H(0)^{1/\eta'} + 1]^{\eta'} - 1 \quad \text{avec} \quad 1/\eta' + 1/\eta = 1\,.$$

Mais d'après l'hypothèse (2.2): $H(0) \leqslant c|\Omega|^{\eta'}$, donc:

$$k_{\text{Max}} \leqslant C_1 \leqslant [c|\Omega|^{\eta-1} - 1]^{\eta'} - 1$$

c'est-à-dire, d'après la définition de k_{Max}:

$$u(x) \leqslant C \quad \text{p.p. sur } \Omega \text{ où } C = [c|\Omega|^{\eta-1} - 1]^{\eta'} - 1\,. \quad \blacksquare$$

2. – Estimation à priori du module des solutions.

Nous énonçons maintenant le résultat principal de cette partie.

THÉORÈME 2.1. – *Soit Ω un ouvert borné de R^n, u_0 un élément de $W^{1,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $1 < \alpha \leqslant n$. Soit $f : \Omega \times R \times R^n \to R$ une intégrande normale convexe en la variable p de R^n, telle que:*

$$a_2(x) - |p|^\alpha \leqslant f(x, u, p) \tag{2.2}$$

$$f(x, u, 0) \leqslant a_1(x) + b|u|^\alpha \tag{2.3}$$

avec $b > 0$, $1 < \alpha < n$ et a_1, a_2 éléments de $L^{n/(\alpha-\varepsilon)}(\Omega)$ $\varepsilon \in]0, 1]$.

Alors pour tout u élément de S ensemble des solutions de:

$$\operatorname{Min}\left\{ \int_\Omega f(x, u, u_x)\, dx \,|\, u \in W^{1,\alpha}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

u appartient à $L^\infty(\Omega)$ et on a:

$|u(x)| \leqslant T$ p.p. *sur Ω où T est une constante qui ne dépend que de n, α, ε, a_1, a_2, b, Ω, $\|u_0\|_\infty$.*

REMARQUE. – Si $\alpha > n$ l'appartenance de tout élément u de S à $L^\infty(\Omega)$ résulte des théorèmes d'immersion de Sobolev (cf. 3è Partie § 1). ∎

La preuve du Théorème 2.1 nécessite de distinguer le cas $1 < \alpha < n$ du cas $\alpha = n$. Nous allons traiter le cas $1 < \alpha < n$ et indiquerons brièvement les modifications (légères) à apporter pour le cas $\alpha = n$. La preuve se décompose en 2 parties. Pour alléger nous traiterons la 1-ère Partie comme un lemme indépendant.

LEMME 2.2 ($1 < \alpha < n$). – *Sous les hypothèses du Théorème 2.1 et en posant $\Psi = \|u_0\|_\infty$, tout élément u de S vérifie la majoration:*

$$\|u\|_{\alpha^*} \leqslant T \quad \text{où} \quad T = T(n, \alpha, b, a_1, a_2, \Psi, |\Omega|) \quad \text{et} \quad \alpha^* = \frac{n\alpha}{n - \alpha}.$$

PREUVE. – 1) Définissons par troncature de u, élément de S, la fonction:

$$v(x) = \begin{cases} \Psi & \text{si } u(x) > \Psi \\ u(x) & \text{si } |u(x)| \leqslant \Psi \\ -\Psi & \text{si } u(x) < -\Psi. \end{cases} \tag{2.4}$$

Par construction v appartient à $W^{1,\alpha}(\Omega)$ et $v = u_0$ sur $\partial\Omega$ dès que u appartient à $W^{1,\alpha}(\Omega)$ et $u = u_0$ sur $\partial\Omega$; v est donc une fonction admissible. Posons:

$$A = \{x \in \Omega \,|\, |u(x)| > \Psi\} =$$

$$= \{x \in \Omega \,|\, u(x) > \Psi\} \cup \{x \in \Omega \,|\, u(x) < -\Psi\} = A_\Psi \cup A^{-\Psi} .$$

Il est immédiat que: $v(x) = u(x)$ pour x dans $\Omega - A$.

2) Ecrivons alors que u est solution, c'est-à-dire qu'il satisfait l'inégalité caractéristique d'un minimum:

$$(2.5) \qquad \int_\Omega f(x, u, u_x)\, dx \leqslant \int_\Omega f(x, v, v_x)\, dx \qquad \text{pour tout } v \text{ admissible.}$$

Choisissons pour v la fonction définie par (2.4), ce qui est licite, celle-ci étant admissible: (2.5) s'écrit:

$$\int_A f(x, u, u_x)\, dx + \int_{\Omega - A} f(x, u, u_x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{A_\Psi} f(x, \Psi, 0)\, dx + \int_{A^{-\Psi}} f(x, -\Psi, 0)\, dx + \int_{\Omega - A} f(x, u, u_x)\, dx .$$

Utilisons les hypothèses (2.2) et (2.3), l'inégalité ci-dessus devient:

$$\int_A a_2(x)\, dx + \int_A |u_x|^\alpha\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{A_\Psi} a_1(x)\, dx + b \int_{A_\Psi} |\Psi|^\alpha\, dx + \int_{A^{-\Psi}} a_1(x)\, dx + \int_{A^{-\Psi}} |-\Psi|^\alpha\, dx .$$

D'où en regroupant, grâce à $A = A_\Psi \cup A^{-\Psi}$

$$\int_A |u_x|^\alpha\, dx \leqslant \int_A (a_1(x) - a_2(x))\, dx + b \int_A \Psi^\alpha\, dx .$$

Mais le terme de droite peut se majorer, puisque $A \subset \Omega$, par:

$$\int_\Omega (a_1(x) - a_2(x))\, dx + b \int_\Omega \Psi^\alpha\, dx .$$

Par conséquent

$$(2.6) \qquad \|u_x\|_{\alpha, A} \leqslant T_1$$

où T_1 est une constante ne dépendant que de a_1, a_2, b, Ψ, Ω: plus précisément

$$T_1^{\alpha} = \Big(\int_{\Omega} a_1(x) - a_2(x)\, dx + b\Psi^{\alpha}|\Omega| \Big)^{1/\alpha}.$$

3) Définissons à partir de u une nouvelle fonction U, telle que $v = u - U$, donc:

$$U(x) = \begin{cases} u(x) - \Psi & \text{si } u(x) > \Psi \\ 0 & \text{si } |u(x)| \leq \Psi \\ u(x) + \Psi & \text{si } u(x) < -\Psi. \end{cases} \tag{2.7}$$

La fonction U possède les propriétés suivantes:

$$U \in W_0^{1,\alpha}(\Omega) \tag{2.8}$$

$$\| u_x \|_{\alpha,A} = \| U_x \|_{\alpha}, \tag{2.9}$$

$$U(x) = 0 \quad \text{pour } x \text{ dans } \Omega - A. \tag{2.10}$$

Grâce à (2.8) nous pouvons appliquer à U le lemme de Sobolev (1); de (2.6) et (2.9) nous déduisons alors:

$$\| U \|_{\alpha^*} \leq S_{\alpha} \| U_x \|_{\alpha} = S_{\alpha} \| u_x \|_{\alpha,A} \leq S_{\alpha} T_1. \tag{2.11}$$

Utilissons alors (2.10), de la dernière majoration de (2.11), il résulte que:

$$\| U \|_{\alpha^*} = \| U \|_{\alpha^*,A} \leq S_{\alpha} T_1. \tag{2.12}$$

Remarquons que $u = v + U$, toujours grâce à (2.11) nous avons par ailleurs:

$$\| u \|_{\alpha^*}^{\alpha^*} \leq \int_A |U + \Psi|^{\alpha^*} dx + \Psi^{\alpha^*}|\Omega| \leq \tag{2.13}$$

$$\leq \operatorname{Max}(2^{\alpha^*-1}, 1) \Big[\int_A |U|^{\alpha^*} dx + \Psi^{\alpha^*}|A| \Big] + \Psi^{\alpha^*}|\Omega|.$$

Elevons alors (2.12) à la puissance α^*, de (2.13) et puisque $|A| \leq |\Omega|$

$$\| u \|_{\alpha^*}^{\alpha^*} \leq \operatorname{Max}(2^{\alpha^*-1}, 1)[S_{\alpha}^{\alpha^*} T_1^{\alpha^*} - \Psi^{\alpha^*}|\Omega|] + \Psi^{\alpha^*}|\Omega|.$$

(1) Soient $1 \leq \alpha < n$ et u élément de $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$. Alors il existe une constante S_{α} indépendante de Ω, telle que $\| u \|_{\alpha^*} \leq S_{\alpha} \| u_x \|_{\alpha}$ avec $\alpha^* = n\alpha/(n-\alpha)$.

c'est-à-dire que finalement:

$$\|u\|_{\alpha^*} \leq T \quad \text{où} \quad T = T(n, \alpha, b, a_1, a_2, \Psi, \Omega) . \quad \square$$

Nous démontrons maintenant le théorème 2.1.

PREUVE DU THÉORÈME 2.1 ($1 < \alpha < n$). - 1) Soit $k \geq \Psi$; définissons, par troncature de u élément de S, la fonction:

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega - A(k) \\ k & \text{si } x \in A(k) \end{cases} \tag{2.14}$$

avec $A(k) = \{x \in \Omega / u(x) > k\}$.

Si u est solution, il résulte des propriétés de $W^{1,\alpha}(\Omega)$ que v est admissible. On peut donc choisir v défini par (2.14) dans l'inégalité caractérisant la solution u:

$$\int_{\Omega} f(x, u, u_x)\, dx \leq \int_{\Omega} f(x, v, v_x)\, dx \quad \text{pour tout } v \text{ admissible.}$$

On en déduit:

$$\int_{A(k)} f(x, u, u_x)\, dx - \int_{\Omega - A(k)} f(x, u, u_x)\, dx \leq \int_{A(k)} f(x, k, 0)\, dx + \int_{\Omega - A(k)} f(x, u, u_x)\, dx \tag{2.15}$$

Utilisons alors les hypothèses (2.2) et (2.3); (2.15) devient, après simplification:

$$\int_{A(k)} a_2(x)\, dx + \int_{A(k)} |u_x|^\alpha\, dx \leq \int_{A(k)} a_1(x)\, dx + bk^\alpha |A(k)| .$$

Soit encore:

$$\int_{A(k)} |u_x|^\alpha\, dx \leq \int_{A(k)} \big(a_1(x) - a_2(x)\big)\, dx + bk^\alpha |A(k)| .$$

Or a_1 et a_2 sont des éléments de $L^{n/(\alpha-\varepsilon)}(\Omega)$. Nous déduisons donc de cette dernière inégalité et de l'inégalité de Hölder:

$$\int_{A(k)} |u_x|^\alpha\, dx \leq \|a_1 - a_2\|_{n/(\alpha-\varepsilon)} |A(k)|^{1-(\alpha-\varepsilon)/n} + bk^\alpha |A(k)| . \tag{2.16}$$

2) Remarquons que la fonction $\max(u-k, 0) = v-k$ appartient à $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$.

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme de Sobolev (cf. note (1) p. 12) à celle-ci:

$$(2.17)\qquad \|u-k\|_{\alpha^*, A(k)} = \Big(\int_{A(k)} (u-k)^{\alpha^*}\,dx\Big)^{1/\alpha^*} \leqslant S_\alpha \Big(\int_{A(k)} |u_i|^\alpha\,dx\Big)^{1/\alpha},$$

en remarquant que S_α ne dépend pas de $A(k)$, donc pas de k, mais seulement de α et n.

Par ailleurs d'après l'inégalité de Hölder:

$$(2.18)\qquad \int_{A(k)} (u-k)\,dx \leqslant \Big(\int_{A(k)} (u-k)^{\alpha^*}\,dx\Big)^{1/\alpha^*} \cdot |A(k)|^{1-1/\alpha^*}.$$

Regroupons alors (2.17) et (2.18), grâce à (2.16) nous obtenons:

$$\int_{A(k)} (u-k)\,dx \leqslant \Big(\int_{A(k)} (u-k)^{\alpha^*}\,dx\Big)^{1/\alpha^*} \cdot |A(k)|^{1-1/\alpha^*} \leqslant$$

$$\leqslant S_\alpha \Big(\int_{A(k)} |u_i|^\alpha\,dx\Big)^{1/\alpha} \cdot |A(k)|^{1-1/\alpha^*} \leqslant S_\alpha \big[\|a_1 - a_2\|_{n/(\alpha-\varepsilon)} \cdot |A(k)|^{1-(\alpha-\varepsilon)/n} +$$

$$+ bk^\alpha |A(k)|\big]^{1/\alpha} |A(k)|^{1-1/\alpha^*}.$$

Cette dernière égalité s'écrit encore, puisque, $(X+Y)^r \leqslant \mathrm{Max}(2^{r-1}, 1) \cdot [X^r + Y^r]$ pour $X, Y, r > 0$:

$$\int_{A(k)} (u-k)\,dx \leqslant S_\alpha \,\mathrm{Max}\,(2^{1/\alpha-1}, 1)\big[\|a_1 - a_2\|_{n/\alpha-\varepsilon}^{1/\alpha} \cdot |A(k)|^{1/\alpha(1-(\alpha-\varepsilon)/n)+(1-1/\alpha^*)} +$$

$$+ b^{1/\alpha} k\, |A(k)|^{1/\alpha-(1-1/\alpha^*)}\big].$$

D'où finalement, d'après la définition de α^*:

$$(2.19)\qquad \int_{A(k)} (u-k)\,dx \leqslant S_\alpha \,\mathrm{Max}\,(2^{1/\alpha-1}, 1)\big[\|a_1 - a_2\|_{n/\alpha-\varepsilon}^{1/\alpha} \cdot |A(k)|^{1+\varepsilon/n\alpha} +$$

$$+ b^{1/\alpha} k |A(k)|^{1+1/n}\big]$$

pour $k \geqslant \Psi$.

Nous aboutissons donc à une inégalité intégrale avec un second membre compliqué que nous allons simplifier. Pour cela posons d'abord:

$$c_1 = S_\alpha \,\mathrm{Max}(2^{1/\alpha-1}, 1) \cdot \mathrm{Max}\big(\|a_1 - a_2\|_{n/\alpha-\varepsilon}^{1/\alpha}, b^{1/\alpha}\big)$$

en remarquant que c_1 ne dépend pas de k.

L'inégalité (2.19) s'écrit alors:

$$(2.20)\qquad \int_{A(k)} (u-k)\,dx \leqslant c_1\left[|A(k)|^{1+\varepsilon/n\alpha} + k|A(k)|^{1+1/n}\right] \text{ pour } k \geqslant \Psi .$$

Posons alors $\gamma = 1 + \varepsilon/n\alpha$ $\delta = 1 + 1/n$ et définissons $\eta = \mathrm{Min}(\gamma, \delta)$.

Evidemment: $\eta > 1$ et $\gamma - \eta \geqslant 0$, $\delta - \eta \geqslant 0$.

Donc puisque $|A(k)| \leqslant |\Omega|$, $|A(k)|^{\gamma-\eta} \leqslant |\Omega|^{\gamma-\eta}$ et de même $|A(k)|^{\delta-\eta} \leqslant |\Omega|^{\delta-\eta}$. Nous pouvons donc majorer le terme de droite de (2.20) et écrire:

$$|A(k)|^{1+\varepsilon/n\alpha} + k|A(k)|^{1+1/n} = |A(k)|^{\gamma} + k|A(k)|^{\delta} \leqslant$$

$$\leqslant |A(k)|^{\eta}\cdot|\Omega|^{\gamma-\eta} + k|A(k)|^{\eta}|\Omega|^{\delta-\eta} \leqslant c_2(1+k)|A(k)|^{\eta}$$

en remarquant que $c_2 = \mathrm{Max}(|\Omega|^{\gamma-\eta}, |\Omega|^{\delta-\eta})$ ne dépend pas de k.

L'inégalité (2.19) peut donc s'écrire sous une forme plus simple:

$$(2.20)\qquad \int_{A(k)} (u-k)\,dx \leqslant c(1+k)|A(k)|^{\eta} \quad \text{pour } k \geqslant \Psi \text{ avec } \eta > 1$$

et $c = c_1 c_2$ ne dépendant pas de k.

Nous déduisons alors immédiatement de (2.10), grâce au lemme 2.1 (ici $k_0 = \Psi$) dont toutes les hypothèses sont satisfaites, que:

$$(2.21)\qquad u(x) \leqslant C + \Psi \quad \text{presque partout sur } \Omega.$$

Par un raisonnement *identique*, mais en tronquant la solution u inférieurement, nous obtiendrions:

$$(2.22)\qquad -u(x) \leqslant C + \Psi \quad \text{presque partout sur } \Omega .$$

Le résultat énoncé résulte alors de (2.21) et (2.22) où $T = C + \Psi$. ∎

La preuve du théorème 2.1 dans le cas $\alpha = n$ est analogue dans ses grandes lignes au cas $1 < \alpha < n$. Cependant certaines modifications sont nécessaires, car l'inégalité de Sobolev est utilisée d'une façon différente. Il sera commode de noter dans ce qui suit:

$$\tilde{\alpha} = n\left(1 + \frac{\varepsilon}{2n}\right)^{-1}, \qquad \text{et alors} \qquad \tilde{\alpha}^* = \frac{2n^2}{\varepsilon}.$$

Cet exposant va jouer le rôle de α.

Nous avons alors l'analogue du lemme 2.2.

LEMME 2.3 ($\alpha = n$). – *Sous les hypothèses du théorème 2.1 et en posant* $\Psi = \|u_0\|_\infty$, *tout* u *élément de* S *vérifie la majoration:*

$$\|u\|_{\alpha^*} \leqslant T^* \quad \text{où} \quad T = T(n, \varepsilon, b, a_1, a_2, \Psi, |\Omega|) .$$

PREUVE. – 1) Définissons par troncature de u, élément de S, la fonction:

$$v(x) = \begin{cases} \Psi & \text{si } u(x) > \Psi \\ u(x) & \text{si } |u(x)| \leqslant \Psi \\ -\Psi & \text{si } u(x) < -\Psi . \end{cases} \tag{2.23}$$

Par construction, v appartient à $W^{1,n}(\Omega)$ et $v = u_0$ sur $\partial\Omega$ dès que u appartient à $W^{1,n}(\Omega)$ et $u = u_0$ sur $\partial\Omega$; v est donc une fonction admissible. Posons $A = \{x \in \Omega \,|\, |u(x)| > \Psi\}$. Il est immédiat que $v(x) = u(x)$ pour x dans $\Omega - A$.

2) La fonction u étant élément de S, on a par définition d'un minimum

$$\int_\Omega f(x, u, u_x)\, dx \leqslant \int_\Omega f(x, v, v_x)\, dx \quad \text{pour tout } v \text{ admissible.} \tag{2.24}$$

Choisissons pour v la fonction définie par (2.23), ce qui est licite, celle-ci étant admissible et utilisons les inégalités (2.2) et (2.3). Par un calcul analogue à celui du lemme 2.2, nous obtenons:

$$\|u_x\|_{n,A} = \Big(\int_A |u_x|^n\, dx \Big)^{1/n} \leqslant \Big(\int_\Omega (a_1(x) - a_2(x))\, dx + b\Psi^n |\Omega| \Big)^{1/n} = T_2 \tag{2.25}$$

où T_2 ne dépend donc que de a_1, a_2, b, n, Ψ, $|\Omega|$.

3) Définissons à partir de u une nouvelle fonction U telle que $v = u - U$:

$$U(x) = \begin{cases} u(x) - \Psi & \text{si } u(x) > \Psi \\ 0 & \text{si } |u(x)| \leqslant \Psi \\ u(x) + \Psi & \text{si } u(x) < -\Psi . \end{cases}$$

La fonction U possède les propriétés suivantes:

$$U \in W_0^{1,n}(\Omega) \tag{2.26}$$

$$\|u_x\|_{n,A} = \|U_x\|_n \tag{2.27}$$

$$U(x) = 0 \quad \text{pour } x \text{ dans } \Omega - A . \tag{2.28}$$

Remarquons que $\tilde{u} - u = -\varepsilon\,2\|\cdot\|_{2,\Omega}^{-2}$, nous avons donc $\tilde{u} \prec u$ et U possède en fait les propriétés suivantes:

$$U \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{2.29}$$

$$a_{x_{n+1}} = U_{x_n}\,\Omega^{-1,p}\,U_{x_1}. \tag{2.30}$$

Nous appliquons maintenant grâce à (2.29) le lemme de Sobolev à U et utilisons (2.25) et (2.30):

$$U_{x_1} \prec S_1 U_{x_2} \prec S_1 S_2 \Omega^{1,p}\,U_{x_3} \prec S_1 S_2 \Omega^{1,p}\,a_{n+1}$$

soit:

$$U_{x_1} \prec S_1 S_2 \Omega^{1,p} T_2 \tag{2.31}$$

qui est l'analogue de l'inégalité (2.11). Nous en déduisons finalement (par un calcul identique à celui de la preuve du lemme 2.3, en utilisant (2.28) et le fait que $u = v - U$):

$$a_{x_1} \prec T \quad \text{où} \quad T = T(n, b, \varepsilon, a_1, a_2, \Psi, \Omega). \quad \blacksquare$$

Nous démontrons maintenant le théorème 2.1 lorsque $\alpha = n$.

PREUVE DU THÉORÈME 2.1 ($\alpha = n$). – 1) Soit $k > \Psi$; définissons par troncature de u, élément de S, la fonction:

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega - A(k) \\ k & \text{si } x \in A(k) \end{cases} \tag{2.32}$$

où $A(k) = \{x \in \Omega \mid u(x) > k\}$. La fonction v est admissible, nous la choisissons donc dans l'inégalité fondamentale:

$$\int_\Omega f(x, u, u_x)\,dx \prec \int_\Omega f(x, v, v_x)\,dx \qquad \text{pour tout } v \text{ admissible},$$

et en déduisons par un calcul maintenant habituel que:

$$\int_{A(k)} |u_x|^n\,dx \prec |a_1 - a_2|_{n(n-\varepsilon)}^n |A(k)|^{1-(n-\varepsilon)/n} + bk^n\,|A(k)|. \tag{2.33}$$

2) Remarquons que la fonction $\max(u - k, 0) = v - k$ appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$ donc à $W_0^{1,n}(\Omega)$ car $\tilde{u} \prec u$. Nous appliquons maintenant successivement l'inégalité de Hölder et le lemme de Sobolev,

puis utilisons (2.33); nous obtenons:

$$\int_{A(k)}(u-k)\,dx \leqslant \Big(\int_{A(k)}(u-k)^{\bar{x}^*}\,dx\Big)^{1/\bar{x}^*}\cdot|A(k)|^{1-1/\bar{x}^*} \leqslant$$

$$\leqslant S_{\bar{x}}\Big(\int_{A(k)}|u_{x_i}|^{\bar{x}}\,dx\Big)^{1/\bar{x}}|A(k)|^{1-1/\bar{x}^*}$$

$$\int_{A(k)}(u-k)\,dx \leqslant S_{\bar{x}}|A(k)|^{1-1/\bar{x}^*}\Big(\int_{A(k)}|u_{x_i}|^{n}\,dx\Big)^{1/n}|A(k)|^{1-1/\bar{x}^*}$$

soit puisque $|A(k)| \leqslant |\Omega|$, $(X+Y)^r \leqslant \mathrm{Max}(2^{r-1},1)[X^r+Y^r]$:

$$(2.40)\qquad \int_{A(k)}(u-k)\,dx \leqslant c\big[|A(k)|^{1+\varepsilon/2n^2}-k|A(k)|^{1+(1/n-\varepsilon/2n^2)}\big] \text{ pour } k \geqslant \Psi,$$

où $c = S_{\bar{x}}|\Omega|^{1/\bar{x}^*}\,\mathrm{Max}(2^{1/n-1},1)\,\mathrm{Max}(|a_1-a_2|_{n/n-\varepsilon}, b^{1/n})$ ne dépend pas de k. Remarquons que $\gamma = 1-\varepsilon/2n^2$ et $\delta = 1-(1/n-\varepsilon/2n^2)$ sont tous deux supérieurs à 1. Posons $\eta = \mathrm{Min}(\gamma,\delta)$; nous obtenons:

$$(2.41)\qquad \int_{A(k)}(u-k)\,dx \leqslant c(1+k)|A(k)|^{\eta} \quad \text{pour } k \geqslant \Psi \text{ avec } \eta > 1,$$

c étant indépendant de k. Nous concluons alors en utilisant le lemme 2.1:

$$(2.42)\qquad u(x) \leqslant C+\Psi \quad \text{presque partout sur } \Omega.$$

Par un raisonnement *identique*, mais en tronquant la solution u inférieurement, nous obtiendrions:

$$(2.43)\qquad -u(x) \leqslant C+\Psi \quad \text{presque partout sur } \Omega.$$

Le résultat énoncé résulte alors de (2.42) et (2.43) avec $T = C-\Psi$. ∎

3. – Autres résultats.

Nous terminons cette 2-è Partie en indiquant comment doit être adaptée la méthode de démonstration du théorème 2.1 lorsqu'on modifie certaines de ses hypothèses.

1) Nous énonçons ici un théorème avec une hypothèse de coercivité plus large que l'hypothèse (2.2)-(2.3). Nous introduisons

pour cela avec STAMPACCHIA [10] la:

DÉFINITION 2.1. – On notera $A(\alpha, \Omega)$ le nombre:

$$\operatorname{Inf}\left\{\frac{\|u_x\|_\alpha^\alpha}{\|u\|_\alpha^\alpha},\ u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)\right\}$$

où $\alpha \geqslant 1$ et Ω est un ouvert borné de R^n.

REMARQUE. – STAMPACCHIA [9]. $A(2, \Omega)$ est la 1-ère valeur propre du problème:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

Par ailleurs pour $1 \leqslant \alpha \leqslant n$, l'estimation suivante est vérifiée par $A(\alpha, \Omega)$:

$$A(\alpha, \Omega) \geqslant \left(\frac{\omega_n}{|\Omega|}\right)^{\alpha/n} \left(\frac{n(n-\alpha)}{\alpha(n-1)}\right)^\alpha$$

où ω_n désigne le volume de la boule unité de R^n. ∎

Nous énonçons maintenant le:

THÉORÈME 2.2. – *Soit Ω un ouvert borné de R^n, u_0 un élément de $W^{1,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $1 < \alpha \leqslant n$. Soit $f: \Omega \times R \times R^n \to R$ une intégrande normale convexe en la variable p de R^n telle que:*

$$a_2(x) - b_2|u|^\alpha + |p|^\alpha \leqslant f(x, u, p) \tag{2.44}$$

$$f(x, u, 0) \leqslant a_1(x) + b_1|u|^\alpha \tag{2.45}$$

avec $b_1 > 0$, $b_2 < A(\alpha, \Omega)$, $1 < \alpha \leqslant n$ et a_1, a_2 éléments de $L^{n/(\alpha-\varepsilon)}(\Omega)$, $\varepsilon \in]0, 1]$. Alors pour tout u élément de S ensemble des solutions de:

$$\operatorname{Min}\left\{\int_\Omega f(x, u, u_x)\,dx \,|\, u \in W^{1,\alpha}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$$

u appartient à $L^\infty(\Omega)$ et on a:

$$|u(x)| \leqslant T \quad \text{p.p. sur } \Omega \qquad \text{où} \qquad T = T(a_1, a_2, n, \alpha, \varepsilon, b_1, b_2, \Omega, \Psi)$$

en posant $\Psi = \|u_0\|_\infty$.

Les étapes de la preuve de ce théorème sont les mêmes que celles du théorème 2.1. Le point délicat est la démonstration de:

$$\|u_x\|_{\alpha,\Omega} = \|U_{x_1}\|_\alpha \leq T .$$

On y utilise l'hypothèse $b_2 < \lambda 1(\alpha, \Omega)$ ainsi que la définition de $\lambda 1(\alpha, \Omega)$.

B) La méthode utilisée dans toute cette partie est une méthode de troncature. Elle repose sur le fait que les fonctions de $W^{1,\alpha}(\Omega)$, telles que $u = u_0$ sur $\partial\Omega$, sont *stables par troncature*.

Plus généralement, si K est un convexe fermé de

$$\{u \in W^{1,\alpha}(\Omega) | u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

stable par troncature, c'est-à-dire tel que:

$$u \in K \Rightarrow \max(u - k, 0) \in K$$

$$u \in K \Rightarrow \max(u - k, 0) \in K \cap W_0^{1,\alpha}(\Omega) \quad \text{si } k > \max_{x \in \bar{\Omega}} |u_0(x)|$$

les résultats du Théorème 2.2 sont encore valables. Plus précisément:

THÉORÈME 2.3. – *Sous les hypothèses du Théorème 2.2 et si K est un convexe fermé stable par troncature de $\{u \in W^{1,\alpha}(\Omega) | u = u_0$ sur $\partial\Omega\}$ tout u solution du problème*:

$$\text{Min} \left\{ \int_\Omega f(x, u, u_x)\, dx \,|\, u \in K \right\}$$

appartient à $L^\infty(\Omega)$ et:

$|u(x)| \leq T$ p.p. sur Ω où $T = T(a_1, a_2, n, \alpha, \varepsilon, b_1, b_2, \Psi, \Omega)$

avec $\Psi = \|u_0\|_\infty$.

Voici des exemples de convexes stables par troncature:

$$K_1 = \{u | u \in W^{1,\alpha}(\Omega),\ |u_x| \leq l \text{ sur } \Omega,\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

$$K_2 = \{u | u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega),\ u \geq 0 \text{ p.p. sur } \Omega\} ; \quad \text{ici } u_0 \equiv 0$$

$$K_3 = \{u | u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega),\ u \geq \omega \text{ p.p. sur } \Omega\} ; \quad \text{ici } u_0 \equiv 0 .$$

Ce dernier exemple, correspondant au cas du « problème avec obstacle ω », ne rentre pas exactement dans le cadre précédent. Il faut en effet utiliser un procédé de troncature légèrement modifié

en définissant:

$$v = \max(u - k_1, 0) \quad \text{où} \quad k_1 = \operatorname{Max}(k, K)$$

avec $K = |\omega|_\infty$, si $\omega \in C^0(\bar{\Omega})$. Dans ces conditions si u appartient à K_2 v appartient à K_3 et les raisonnements de cette partie s'appliquent ($\omega \leqslant 0$ sur $\partial\Omega$). ∎

3-ÈME PARTIE

CONTINUITÉ DES SOLUTIONS

Nous étudions ici la continuité höldérienne des solutions du problème:

$$\operatorname{Min}\left\{\int_\Omega f(x, u, u_x)\,dx \,|\, u \in W^{1,\alpha}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}.$$

1. – Le cas $\alpha > n$.

Dans le cas $\alpha > n$, il résulte immédiatement des théorèmes d'immersion de Sobolev [5] que toutes les solutions sont (presque partout) höldériennes d'exposant $\eta = 1 - n/\alpha$.

2. – Le cas $\alpha = n$.

Dans le cas $\alpha = n$, la continuité höldérienne des solutions est un résultat dû à Morrey. Sa démonstration consiste à passer en coordonnées polaires, puis, en utilisant le fait que $\alpha = n$, à se ramener (par la résolution d'une inéquation différentielle) à la définition de la continuité höldérienne. Enonçons auparavant un critère assez général de continuité höldérienne, dû à MORREY [6: p. 79]. Dans ce qui suit on notera: $B(x_0; r) = \{x \in \boldsymbol{R}^n \,|\, |x - x_0| \leqslant r\}$, où x_0 est un point de Ω.

LEMME 3.1. – *Soit* Ω *un ouvert de* $\boldsymbol{R}^n$, x_0 *un point de* Ω. *Soit* u *une fonction de* $W^{1,\alpha}(\Omega)$ *telle que*:

$$\forall B(x_0; r),\ \int_{B(x_0; r)} |u_x|^\alpha\,dx \leqslant C r^{n - \alpha + \alpha\eta}$$

avec $\eta > 0$, $\alpha \leqslant n$ *et où* C *est une constante indépendante de* r.

Alors pour boule $B(x_0; r/2)$, on a:

$$\sup\left\{\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\eta}\ ;\ x, y \in B\left(x_0; \frac{r}{2}\right)\right\} \leqslant C_1,$$

où C_1 est une constante ne dépendant que de n et C et:

$$\operatorname*{Max}_{x \in B(x_0; r/2)} |u(x)| \leqslant \frac{1}{|B(x_0; r/2)|} \int_{B(x_0; r/2)} |u(x)|\,dx + C_1 r^\eta .$$

Nous énonçons maintenant le:

THÉORÈME 3.1. – *Soit Ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$, u_0 un élément de $W^{1,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Soit f une fonction de Carathéodory de $\Omega \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n$ dans $\boldsymbol{R}$ convexe en la variable p de $\boldsymbol{R}^n$, telle que:*

$$(3.1) \qquad a_2(x) + C_2|u_x|^\alpha \leqslant f(x, u, u_x) \leqslant a_1(x) + C_1|u_x|^\alpha \qquad \textit{avec } C_1 \geqslant C_2 > 0$$

$\alpha = n$, n entier strictement compris entre 1 et $+\infty$, a_1, a_2 éléments de $L^{\alpha/(\alpha-\varepsilon)}(\Omega)$ $\varepsilon \in]0, 1]$.

Alors tout u élément de S ensemble des solutions de:

$$\operatorname{Min}\left\{\int_\Omega f(x, u, u_x)\,dx \,|\, u \in W^{1,\alpha}(\Omega)\ ,\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$$

est hölder continu à l'intérieur de Ω.

REMARQUE. – Lorsque la frontière $\partial\Omega$ est régulière ainsi que u_0 (par exemple lipschitz continu), les solutions sont hölder continues jusqu'au bord $\partial\Omega$.

PREUVE [MORREY 6]. – Dans tout ce qui suit x_0 désignera un point quelconque de Ω mais fixé. Nous posons

$$\varphi(r) = \int_{B(x_0; r)} |u_x|^\alpha\,dx\ .$$

La preuve du théorème 3.1 consiste à montrer que:

$$\varphi(r) \leqslant c r^{n\eta} \qquad \text{avec} \qquad \eta \in]0, 1]$$

où c est une constante indépendante de r (mais dépendante de x_0), puis à conclure grâce au lemme 3.1. Pour cela nous partons de

l'inégalité caractérisant une solution u:

$$\int_{\Omega} f(x, u, u_x)\,dx \leqslant \int_{\Omega} f(x, v, v_x)\,dx \tag{3.2}$$

pour tout v admissible.

Choisissons comme fonction admissible la fonction suivante, définie en coordonnées polaires d'origine x_0 dans $\boldsymbol{R}^n$:

$$v(\sigma, \varrho) = \begin{cases} u(\sigma, \varrho) & \text{sur } \Omega - B(x_0, r) \\ \overline{u} + \dfrac{\varrho}{r}[u(\sigma, r) - \overline{u}] & \text{sur } B(x_0, r) \end{cases} \tag{3.3}$$

où

$$\overline{u} = \frac{1}{|\partial B(x_0, 1)|} \int_{\partial B(x_0, 1)} u(\sigma r)\,d\sigma$$

et est défini pour presque tout r, d'après le théorème de Fubini. Nous transformons alors (3.2) grâce à (3.1) puis passons en coordonnées polaires d'origine x_0 en utilisant le choix (3.3) de v. Nous obtenons:

$$\int_{B(x_0; r)} |u_x|^\alpha\,dx \leqslant \frac{1}{c_2} \int_{B(x_0; r)} \big(a_1(x) - a_2(x)\big)\,dx + \\ + \frac{c_1}{c_2}\frac{1}{n} \int_{\partial B(x_0; 1)} \{|u(\sigma, r) - \overline{u}|^2 + |u_\sigma(\sigma, r)|^2\}^{\alpha/2}\,d\sigma\,. \tag{3.4}$$

Par ailleurs puisque $u(\sigma, r) \in W^{1,\alpha}(\partial B(x_0, r))$ pour presque tout r:

$$\int_{\partial B(x_0; 1)} \{|u(\sigma, r) - \overline{u}|^2 + |u_\sigma(\sigma, r)|^2\}^{\alpha/2}\,d\sigma \leqslant c(n) \int_{\partial B(x_0; 1)} |u_\sigma(\sigma, r)|^\alpha\,d\sigma \ (^2) \tag{3.5}$$

De (3.4) et (3.5); il résulte finalement en utilisant la définition de $\varphi(r)$ et sachant que a_1, a_2 sont des éléments de $L^{n/(\alpha-\varepsilon)}(\Omega)$:

$$\varphi(r) \leqslant Br^\varepsilon + Ar\varphi'(r) \tag{3.6}$$

(2) Cette inégalité peut se démontrer grâce à un raisonnement par l'absurde.

où A, B sont des constantes dépendant des données du problème, de x_0, *mais indépendantes de* r.

La résolution explicite de l'inéquation différentielle fournit l'inégalité cherchée:

$$\varphi(r) \leqslant \text{Cste} \cdot r^{1/A} .$$

La fonction u solution est donc localement höldérienne de rapport $\eta = 1/nA$. ∎

3. – Le cas $1 < \alpha < n$.

Nous montrons la *continuité lipschitzienne de certaines solutions*, lorsque $1 < \alpha < n$, *mais dans le cas particulier où l'intégrande* f *est une fonction de Carathéodory qui ne dépend pas de* u. Nous montrons en fait que l'ensemble des solutions du problème:

$$\text{Min}\Big\{ \int_\Omega f(x, u_x)\, dx \,|\, u \in C^{0,1}(\overline{\Omega}),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \Big\}$$

est non vide et, *sous certaines hypothèses, inclu* dans l'ensemble des solutions du problème:

$$\text{Min}\Big\{ \int_\Omega f(x, u_x)\, dx \,|\, u \in W^{1,\alpha}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \Big\} .$$

Rappelons à présent la:

DÉFINITION 3.1. – *Condition de pente bornée* (*B.S.C.*). Soit Ω un ouvert borné de R^n, de bord $\partial\Omega$. u_0 une fonction définie sur $\partial\Omega$. Soit Γ la variété de dimension $(n-1)$ de $R^n \times R$: $\Gamma = \{(x, u(x)) \in \in \partial\Omega \times R \,|\, u = u_0(x)\}$. La fonction u_0, « valeur au bord », satisfait la B.S.C. si pour tout point $P_0(x_0, u_0(x_0))$ de Γ il existe deux plans $\Pi^\pm$ de R^{n+1} d'équations:

$$\pi^\pm(x) = \sum_1^n \alpha_i^\pm (x^i - x_0^i) - u_0(x_0) , \qquad x \in \partial\Omega$$

tels que:

(i) Γ est entre Π^+ et Π^-: $\pi^-(x) \leqslant u_0(x) \leqslant \pi^+(x)$ pour tout x de $\partial\Omega$

(ii) *la pente de ces plans est bornée indépendamment de* P_0 *par*

un nombre R_0:

$$\left(\sum_1^n (\alpha_i^+)^2\right)^{\frac{1}{2}} < R_0 \quad \text{et} \quad \left(\sum_1^n (\alpha_i^-)^2\right)^{\frac{1}{2}} < R_0.$$

REMARQUE. – Si u_0 satisfait la B.S.C., Ω est en général nécessairement convexe (cf. HARTMAN [4]).

Nous avons alors le:

THÉORÈME 3.3. – *Soit* Ω *un ouvert borné convexe de* $\boldsymbol{R}^n$. *Soit* u_0 *un élément de* $W^{1,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *et satisfaisant la B.S.C. Soit* $f: \Omega \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ *une intégrande de Carathéodory convexe en la variable* p *de* $\boldsymbol{R}^n$ *telle que:*

$$a_2(x) + |p|^\alpha \leqslant f(x, p) \tag{3.7}$$

$$f(x, 0) \leqslant a_1(x) \tag{3.8}$$

avec $1 < \alpha < n$ *et* a_1, a_2 *éléments de* $L^{n/(\alpha-\varepsilon)}$, $\varepsilon \in]0, 1]$.

Soit S *l'ensemble des solutions du problème:*

$$\operatorname{Min}\left\{\int_\Omega f(x, u_x)\, dx \,|\, u \in W^{1,\alpha}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}.$$

Alors il existe des élements u *de* S *vérifiant l'estimation:*

$$\lambda(u) = \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} \leqslant R_0.$$

Ces solutions sont lipschitziennes sur Ω *et leurs normes peuvent s'estimer en fonction d'une constante ne dépendant que de* R_0 *et* $n, \alpha, \varepsilon, a_1, a_2, \Omega, \|u_0\|_\infty$.

La preuve du théorème 3.3 utilise un lemme d'approximation des fonctions convexes et un théorème dû à HARTMAN-STAMPACCHIA [2].

LEMME 3.2 [MORREY 6]. – *Soit* $f: \Omega \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ *satisfaisant les hypothèses du Théorème 3.3. Alors on peut toujours approcher l'intégrande* f *par une suite* $\{f_m\}$ *de fonctions* $f_m: \Omega \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ *possédant les propriétés suivantes:*

(i) $f_m(x, \cdot) \to f(x, \cdot)$ *uniformément sur tout compact de* $\boldsymbol{R}^n$.

(ii) $f_m(\cdot, p) \to f(\cdot, p)$ $L^1(\Omega)$.

(iii) f_m *est strictement convexe*:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial p_j} f_m(x, p) - \frac{\partial}{\partial p_j} f_m(x, q) \right) \cdot (p_j - q_j) > 0$$

pour tout p, q *de* $\mathbf{R}^n$ *distincts.*

(iv) f_m *est de classe* C^2 *en* $p \in \mathbf{R}^n$.

(v) $\forall R > 0$, $\exists m(R)$ *tel que: si* $|p| \leqslant R$, $m \geqslant m(R) \Rightarrow f(x, p) \leqslant f_m(x, p)$.

THÉORÈME 3.4. (HARTMAN-STAMPACCHIA [2]). – *Soit* $f: \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *une intégrande de Carathéodory convexe en la variable* p *de* $\mathbf{R}^n$. *Soit* Ω *un ouvert borné convexe de* $\mathbf{R}^n$ *et* u_0 *un élément de* $W^{1,\infty}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, *satisfaisant la B.S.C. de constante* R_0. *Alors le problème*:

$$\operatorname{Min} \left\{ \int_\Omega f(x, u_x)\, dx \,|\, u \in C^{0,1}(\bar{\Omega}),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

admet au moins une solution et toute solution vérifie l'estimation:

$$\lambda(u) \leqslant R_0 .$$

Nous indiquons maintenant brièvement la:

PREUVE DU THÉORÈME 3.3. – Elle consiste à introduire en vertu du lemme 3.2 le problème:

$$\operatorname{Min} \left\{ \int_\Omega f_m(x, u_x)\, dx \,|\, u \in C^{0,1}(\bar{\Omega}),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

qui d'après le théorème 3.4 admet une solution unique (f_m est strictement convexe). On construit ainsi une suite $\{u_m\}_{m \in \mathbf{N}}$ de fonctions telles que $\lambda(u_m) \leqslant R_0$, $\forall m \in \mathbf{N}$, dont les valeurs d'adhérence u vérifient $\lambda(u) \leqslant R_0$ et sont solutions du problème:

$$\operatorname{Min} \left\{ \int_\Omega f(x, u_x)\, dx \,|\, u \in W^{1,\infty}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Nous en déduisons, en utilisant les résultats de la 2-è Partie, l'estimation cherchée de la norme lipschitzienne de u:

$$\|u\|_{1,\Omega} = \|u\|_\infty + \lambda(u) \leqslant T + R_0 \quad \text{où} \quad T = T(n, \alpha, \varepsilon, a_1, a_2, \Omega, \|u_0\|_\infty)$$

Terminons cette Partie par deux remarques importantes. ∎

REMARQUE 1. – On peut se demander si *tous* les éléments u de S vérifient l'estimation $\lambda(u) \leqslant R_0$. *Il n'en est rien* comme le montrent des contre-exemples. Il suffit ainsi de considérer en *dimension* 1 le problème:

$$\operatorname{Min}\left\{\int_0^1 u^2(|u_x|-1)^2\,dx \,|\, u \in W^{1,2}(]0,1[),\quad u(0)=u(1)=0\right\}.$$

La fonction

$$u(x)=\begin{cases} x & \text{sur }]0,\tfrac{1}{2}] \\ -x+1 & \text{sur } [\tfrac{1}{2},1[\end{cases}$$

est solution mais ne satisfait pas $\lambda(u) \leqslant R_0$; $R_0 = 0$ mais $\lambda(u) = 1$.

REMARQUE 2. – Les hypothèses $\alpha < n$ et a_1, a_2 éléments de $L^{n/(\alpha-\varepsilon)}(\Omega)$ n'interviennent pas dans la démonstration de:

$$\lambda(u) \leqslant R_0 .$$

Elles servent à obtenir une estimation de la norme $|u|_{1,\Omega}$, grâce aux résultats de la 2-è Partie. Nous pouvons donc énoncer un théorème plus général mais un peu moins précis que le théorème 3.3:

THÉORÈME 3.3 bis. – *Soit Ω un ouvert borné convexe de $\boldsymbol{R}^n$. Soit u_0 un élément de $W^{1,\alpha}(\Omega)$ satisfaisant la B.S.C. Soit $f: \Omega \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ une intégrande de Carathéodory convexe en la variable p de $\boldsymbol{R}^n$ telle que:*

$$a_2(x) + |p|^\alpha \leqslant f(x,p) \tag{3.7}$$

$f(x,0) \leqslant a_1(x)$ avec $1 < \alpha < \infty$ et a_1, a_2 éléments de $L^1(\Omega)$.

Soit S l'ensemble des solutions du problème:

$$\operatorname{Min}\left\{\int_\Omega f(x,u_x)\,dx \,|\, u \in W^{1,\alpha}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}.$$

Alors il existe des éléments u de S, lipschitziens sur Ω, vérifiant l'estimation:

$$\lambda(u) \leqslant R_0 . \quad \blacksquare$$

4-ème Partie

APPLICATION: PROBLÈMES RELAXÉS EN CALCUL DES VARIATIONS

1. – Rappels.

On sait que les problèmes du calcul des variations de la forme

$$\operatorname{Min}\left\{\int_\Omega f(x, u, u_x)\,dx \,|\, u \in W^{1,x}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}.$$

n'ont en général pas de solutions si f n'est pas convexe en u_x. Ekeland et Teman [1] ont cependant caractérisé, sous certaines conditions, les points d'adhérence des suites minimisantes de tels problèmes: ce sont les solutions, dites relaxées de nouveaux problèmes de calcul des variations, dits relaxés ou convexifiés de la forme:

$$\operatorname{Min}\left\{\int_\Omega f^{**}(x, u, u_x)\,dx \,|\, u \in W^{1,x}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}.$$

La nouvelle intégrande, notée f^{**}, désigne l'intégrande convexifiée (ou Γ-régularisée) associée à f. Donnons quelques définitions et résultats avant de rappeler le théorème exact. Nous renvoyons pour plus de précisions à Ekeland-Teman [1].

Définition 4.1. – Si $f: \Omega \times R \times R^n \to R$ on appelle fonction polaire en la 3-ième variable de f et on note f^* la fonction $f^*: \Omega \times R \times \times R^n \to R$ définie par:

$$f^*(x, u, p^*) = \sup_{p \in R^n} \{\langle p, p^* \rangle - f(x, u, p)\}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans R^n.

On appelle fonction bi polaire de f et on note f^{**} la fonction obtenue à partir de f^* en réitérant le processus:

$$f^{**}(x, u, p) = \sup_{p^* \in R^n} \{\langle p, p^* \rangle - f^*(x, u, p^*)\}.$$

Définition 4.2. – On appelle épigraphe de la fonction $f(x, u, \cdot)$: $p \in R^n \to f(x, u, p) \in R$ pour $(x, u) \in \Omega \times R$ et on note épi f le sous

ensemble de $R^n \times R$ suivant:

$$\{(p, \lambda)\ f(x, u, p) \leq \lambda\}\ .$$

La proposition suivante précise la relation entre f et f^{**}.

PROPOSITION 4.1. – *Soit* $f: \Omega \times R \times R^n \to R$ *et* f^{**} *sa bipolaire. Alors*

$$\text{épi}\, f^{**} = \overline{\text{co}}(\text{épi}\, f)$$

où $\overline{\text{co}}(\text{épi}\, f)$ *désigne l'enveloppe convexe fermée de* épi f.

Par ailleurs, et c'est une preuve supplémentaire de l'intérêt de la notion d'intégrande normale:

PROPOSITION 4.2. – *Si* $f: \Omega \times R \times R^n \to R$ *est une intégrande normale, alors* $f^{**}: \Omega \times R \times R^n \to R$ *est aussi une intégrande normale.*

Nous énonçons à présent le:

THÉORÈME 4.1 (EKELAND-TEMAM). – *Soit* $f: \Omega \times R \times R^n \to R$ *une intégrande de Carathéodory telle que*:

$$(4.1) \qquad a_2(x) - c_2|p|^\alpha \leq f(x, u, p) \leq a_1(x) + b|u|^\alpha + c_1|p|^\alpha$$

où a_1, a_2 *appartiennent à* $L^1(\Omega)$, $1 < \alpha < +\infty$, $b \geq 0$ *et* $c_1 \geq c_2 > 0$.
Soit $u_0 \in W^{1,\alpha}(\Omega)$. *Alors les problèmes*:

$$(\mathcal{P}) \qquad \text{Inf}\left\{\int_\Omega f(x, u, u_x)\, dx \,|\, u \in W^{1,\alpha}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$$

$$(\mathcal{PR}) \qquad \text{Min}\left\{\int_\Omega f^{**}(x, u, u_x)\, dx \,|\, u \in W^{1,\alpha}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$$

ont même valeur:

$$\text{Inf}(\mathcal{P}) = \text{Min}(\mathcal{PR})\ .$$

Le problème $(\mathcal{PR})$ *a des solutions optimales: ce sont les points d'adhérence dans* $W^{1,\alpha}(\Omega)$ *des suites minimisantes du problème* $(\mathcal{P})$.

2. – Enoncé des résultats.

Nous pouvons maintenant énoncer une série de résultats concernant la régularité des solutions relaxées (autrement dit des solutions optimales du problème $\mathcal{PR}$). Ces résultats sont des corollaires

immédiats des théorèmes énoncés dans les 3-e et 4-e Partie. Leurs hypothèses sont *à fortiori* satisfaites, les hypothèses du Théorème étant plus fortes que celles des résultats de ce travail. Ainsi l'intégrande est une fonction de Carathéodory au lieu d'être seulement normale et la majoration (4.1) est plus forte que les majorations:

$$a_2(x) - c_2|p|^\alpha \leq f(x, u, p)$$

$$f(x, u, 0) \leq a_1(x) - b|u|^\alpha .$$

Nous supposons par contre, ce qui est indispensable, que:

(i) a_1, a_2 appartiennent à $L^{n/(\alpha-\varepsilon)}(\Omega)$ $1 < \alpha \leq n$

(ii) u_0 appartient à $W^{1,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Voici d'abord un principe du maximum pour les solutions du problème $(\mathcal{PR})$.

THÉORÈME 4.2. – *Soit Ω un ouvert borné de R^n, u_0 un élément de $W^{1,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $1 < \alpha \leq n$.*

Soit $f: \Omega \times R \times R^n \to R$ une fonction de Carathéodory telle que:

$$a_2(x) - c|p|^\alpha \leq f(x, u, p) \leq a_1(x) + b|u|^\alpha + c|p|^\alpha \tag{4.2}$$

avec $c > 1$, $b \geq 0$ $1 < \alpha \leq n$ et a_1, a_2 éléments de $L^{n/(\alpha-\varepsilon)}(\Omega)$, $\varepsilon \in]0, 1]$.

Alors pour tout u élément de S ensemble des solutions du problème relaxé $(\mathcal{PR})$, u appartient à $L^\infty(\Omega)$ et on a:

$$|u(x)| \leq T \quad \text{p.p. } sur\ \Omega .$$

où T est une constante qui ne dépend que de n, α, ε, a_1, a_2, b, Ω, $\|u_0\|_\infty$.

Dans le cas où $\alpha > n$, le principe du maximum et en fait la continuité höldérienne des solutions du problème $(\mathcal{PR})$ résultent des théorèmes d'immersion de Sobolev (cf. Théorème 3.1).

Dans le cas où $\alpha = n$, les solutions sont localement höldériennes:

THÉORÈME 4.3. – *Soit Ω un ouvert borné de R^n, u_0 un élément de $W^{1,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.*

Soit f une fonction de Carathéodory de $\Omega \times R \times R^n$ dans R telle que:

$$a_2(x) + C_2|u_x|^\alpha \leq f(x, u, u_x) \leq a_1(x) + C_1|u_x|^\alpha \tag{4.3}$$

avec $C_1 \geq C_2 > 0$, $\alpha = n$, entier strictement compris entre 1 et $+\infty$, a_1, a_2 éléments de $L^{n/(\alpha-\varepsilon)}(\Omega)$ $\varepsilon \in]0, 1]$.

Alors les solutions de

$$\operatorname{Min}\left\{\int_\Omega f^{**}(x, u, u_x)\,dx \mid u \in W^{1,\alpha}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$$

sont hölder continues à l'intérieur de Ω.

REMARQUE. – Lorsque la frontière $\partial\Omega$ est régulière ainsi que u_0 les solutions sont hölder continues jusqu'au bord $\partial\Omega$.

Enfin dans le cas où $1 < \alpha < n$, nous ne considérons que des problèmes du type:

$$\operatorname{Inf}\left\{\int_\Omega f(x, u_x)\,dx \mid u \in W^{1,\alpha}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$$

$$\operatorname{Min}\left\{\int_\Omega f^{**}(x, u_x)\,dx \mid u \in W^{1,\alpha}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$$

avec de plus l'hypothèse de la B.S.C sur u_0 (cf. définition 3.2), ce qui suppose en général que Ω soit un ouvert borné convexe.

THÉORÈME 4.4. – *Soit* Ω *un ouvert borné convexe de* $\boldsymbol{R}^n$. *Soit* u_0 *élément de* $W^{1,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *et satisfaisant la B.S.C. Soit* $f: \Omega \times \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ *une fonction de Carathéodory telle que:*

$$a_2(x) + c_2|u_x|^\alpha \leqslant f(x, u_x) \leqslant a_1(x) + c_1|u_x|^\alpha \tag{4.4}$$

avec $1 < \alpha < n$, $c_1 \geqslant c_2 > 0$ *et* a_1, a_2 *éléments de* $L^{n/(\alpha-\varepsilon)}(\Omega)$, $\varepsilon \in]0, 1]$.

Soit S *l'ensemble des solutions du problème relaxé:*

$$\operatorname{Min}\left\{\int_\Omega f^{**}(x, u_x)\,dx \mid u \in W^{1,\alpha}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}.$$

Alors il existe des éléments u *de* S *vérifiant l'estimation:*

$$\lambda(u) = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} \leqslant R_0.$$

Ces solutions relaxées sont lipschitziennes sur Ω *et leurs normes peuvent s'estimer en fonction d'une constante ne dépendant que de* R_0 *et* $n, \alpha, \varepsilon, a_1, a_2, c_2, \Omega, \|u_0\|_\infty$.

REMARQUES. – 1) Le contre exemple de la remarque 1 de la 3-è Partie est toujours valable: il existe des solutions relaxées qui ne satisfont pas $\lambda(u) \leqslant R_0$.

2) Comme dans la 3-è Partie, on peut énoncer une version affaiblie de ce théorème mais plus générale:

THÉORÈME 4.4 bis. – *Soit Ω un ouvert borné convexe de $W^{1,x}(\Omega)$ et satisfaisant la B.S.C. Soit $f: \Omega \times \dot{R}^n \to R$ une fonction de Carathéodory telle que:*

$$a_2(x) + c_2|u_x|^x \leq f(x, u_x) \leq a_1(x) + c_1|u_x|^x \tag{4.4}$$

avec $1 < x < \infty$, $c_1 \geq c_2 > 0$ et a_1, a_2 éléments de $L^1(\Omega)$.

Soit S l'ensemble des solutions du problème relaxé:

$$\operatorname{Min}\left\{ \int_\Omega f^{**}(x, u_x)\, dx \,/\, u \in W^{1,x}(\Omega),\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Alors il existe des éléments u de S, lipschitziens sur Ω, vérifiant l'estimation:

$$\lambda(u) \leq R_0 . \quad \blacksquare$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. EKELAND - R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod. Bordas. 1974.

[2] P. HARTMAN - G. STAMPACCHIA. *On some nonlinear elliptic differential functional equations*. Acta Math., **115** (1966), pp. 271-310.

[3] P. HARTMAN. *On quasilinear elliptic functional-differential equations*. Proceeding of the International Symposium Puerto Rico (1965), pp. 393-407.

[4] *On the bounded slope condition*. Pacific J. Math., **13** (1966), pp. 495-512.

[5] M. MIRANDA. *Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in n variabili*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. **19** (1965), pp. 233-249.

[6] C. B. MORREY. *Multiple integrals in the calculus of variations*. Springer. 1966.

[7] O. A. LADYZENSKAJA - N. N. URAL'CEVA. *Equations aux dérivées partielles du type elliptique*. Dunod. 1968.

[8] A. W. ROBERTS - D. E. VARBERG. *Convex functions*. Academic Press. 1973.

[9] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions*. Hermann. 1967.

[10] G. STAMPACCHIA. *On some regular multiple integral problems in the calculus of variations*. Comm. Pure Appl. Math., **16** (1963), pp. 383-421.

[11] L. SOBOLEV. *Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik*. Akademie Verlag. Berlin. 1964.

[12] K. YOSIDA. *Functional analysis*. Springer. 1965.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 20 ottobre 1975

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 11, n° 4, 1977, p. 369 à 400)

EXISTENCE ET APPROXIMATION DE POINTS SELLES POUR CERTAINS PROBLÈMES NON LINÉAIRES (*)

par B. SCHEURER (1)
Communiqué par P.-A. RAVIART

Résumé. — *Sous une hypothèse naturelle, la résolution d'inéquations variationnelles (correspondant à des contraintes linéaires égalités ou inégalités, pour des opérateurs monotones fortement non linéaires) est équivalente à la résolution de problèmes de points-selles. Les résultats d'existence et d'unicité pour ces problèmes permettent alors de démontrer un théorème d'approximation. Nous obtenons ainsi un cadre assez large pour les méthodes mixtes et hybrides d'éléments finis.*

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude de deux types de problèmes de points-selles :

$$\left.\begin{aligned} &\text{Trouver } (u, p^*) \text{ tel que} \\ &\langle A(u), v\rangle + \langle p^*, Bv\rangle = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in V, \\ &\langle Bu, q^*\rangle \leqq \langle g, q^*\rangle, \qquad \forall q^* \text{ dans un espace à préciser,} \end{aligned}\right\} \qquad (\mathcal{S}_1^*)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Trouver } (u, p^*) \text{ tel que} \\ &\langle A(u), v\rangle + \langle p^*, Bv\rangle = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in V, \\ &\langle Bu, q^*\rangle = \langle g, q^*\rangle, \qquad \forall q^* \text{ dans un espace à préciser,} \end{aligned}\right\} \qquad (\mathcal{S}_2^*)$$

où A est un opérateur (éventuellement non linéaire) de V dans V^* (V est un espace de Banach de dual V^*; $\langle .,. \rangle$ désigne un produit de dualité) et B un opérateur linéaire.

Ces problèmes correspondent à l'inéquation variationnelle :

$$\left.\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in K_g \text{ tel que} \\ &\langle A(u), v-u\rangle \geqq \langle f, v-u\rangle, \qquad \forall v \in K_g, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathcal{S})$$

où K_g est un sous-ensemble convexe fermé non vide de V de la forme :

$$K_g = \{ v \in V \mid Bv \leqq g \} \qquad \text{(contraintes linéaires inégalités),}$$

ou

$$K_g = \{ v \in V \mid Bv = g \} \qquad \text{(contraintes linéaires égalités).}$$

(*) Manuscrit reçu le 5 janvier 1977.
(1) Service Mathématiques Appliquées, Centre d'Études de Limeil, Villeneuve-Saint-Georges, France.

Des problèmes du type de $(\mathcal{I}_1^*)$ ou $(\mathcal{I}_2^*)$ interviennent lors de l'étude de méthodes d'éléments finis mixtes ou hydrides [3, 4, 11, 12]. Nous étudions l'existence et l'unicité pour les problèmes $(\mathcal{I}_1^*)$ et $(\mathcal{I}_2^*)$ de façon intrinsèque, c'est-à-dire sans supposer qu'ils résultent d'un problème d'optimisation. En particulier nous ne supposons pas que $A(u)-f$ est la dérivée (au sens de Gâteaux) d'une fonctionnelle convexe. Nous utilisons le cadre et les méthodes définies par Ekeland et Temam dans [5] et Aubin dans [1]. L'outil essentiel est un théorème du type Kuhn-Tucker en dimension infinie, qui est appliqué à une forme voisine de $(\mathcal{I}_1^*)$ ou $(\mathcal{I}_2^*)$. Nous généralisons ainsi des résultats, obtenus par des méthodes différentes, de Raviart-Thomas [11, 12] et Brezzi [3].

Le plan est le suivant :

Dans un premier chapitre, nous étudions deux classes de problèmes de minimisation avec contraintes correspondant aux deux formes possibles de K_g. Nous obtenons des conditions suffisantes d'existence et d'unicité pour les problèmes dual et de point-selle associés et en déduisons alors des résultats d'existence et d'unicité pour $(\mathcal{I}_1^*)$ et $(\mathcal{I}_2^*)$. Nous concluons par un lemme précisant le lien entre des propriétés « naturelles » (pour l'approximation numérique) de l'opérateur de contrainte B.

Dans un deuxième chapitre, nous étudions les problèmes $(\mathcal{I}_1^*)$ et $(\mathcal{I}_2^*)$ en liaison avec leurs approximations $(\mathcal{I}_1^*)_h$ et $(\mathcal{I}_2^*)_h$. Dans le cas du problème $(\mathcal{I}_1^*)_h$ nous énonçons un résultat d'existence et d'unicité analogue à celui du premier chapitre pour $(\mathcal{I}_1^*)$ ainsi qu'une estimation *a priori* utile pour l'étude de l'erreur et de la convergence. Dans le cas du problème $(\mathcal{I}_2^*)_h$ nous énonçons une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité, des résultats de stabilité et de dépendance continue de la solution en fonction des données. Nous donnons enfin un théorème de majoration d'erreur. Les hypothèses faites sur l'opérateur A sont satisfaites par exemple si :

$$A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \qquad \alpha \geqq 2.$$

Enfin dans un troisième chapitre nous détaillons l'étude de quatre exemples. Le premier exemple est le problème de l'obstacle. Nous étudions ensuite les cas correspondants aux problèmes d'éléments finis hybrides et mixtes. Nous terminons avec le problème de Stokes pour lequel nous retrouvons un résultat connu [5, 13].

1. RÉSULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DE POINTS-SELLES

1.1. Problèmes de minimisation sous contraintes linéaires

Nous considérons ici deux classes assez larges de problèmes de minimisation sous contraintes linéaires. L'étude du problème dual et du lagrangien associés à ces classes sera la base des résultats du paragraphe 2.

Soient V et Y deux espaces de Banach de dual V^*, Y^* (2). Soit $\mathscr{C}$ un cône convexe fermé de Y définissant une relation de préordre $\geqq$ et $\mathscr{C}^*$ son cône polaire (notons que $\mathscr{C}^*$ est un cône convexe fermé de Y^*, dual de Y) :

$$\mathscr{C}^* = \{ q^* \in Y^* \mid \langle q^*, q \rangle \geqq 0, \forall q \in \mathscr{C} \}$$

et

$$q \in \mathscr{C} \iff q \geqq 0 \iff \langle q^*, q \rangle \geqq 0, \qquad \forall q^* \in \mathscr{C}^*.$$

On se donne enfin un opérateur linéaire continu B de V dans Y.

1.1.1. *Contraintes inégalités*

Soit g un élément donné de $\mathscr{C}$. A g on associe :

$$K_g = \{ v \in V \mid Bv \leqq g \} = \{ v \in V \mid -(Bv - g) \in \mathscr{C} \}.$$

Considérons la classe de problèmes :

$$\operatorname{Inf} \{ \langle u^*, v \rangle \mid v \in K_g \}, \qquad (\mathscr{P})$$

où u^* est donné dans V^*.

Le lagrangien associé au problème $(\mathscr{P})$ est défini par $L : V \times \mathscr{C}^* \to \overline{\mathbf{R}}$ où :

$$L(v, q^*) = \langle u^*, v \rangle + \langle Bv - g, q^* \rangle.$$

Le problème $(\mathscr{P})$ peut encore s'écrire :

$$\operatorname*{Inf}_{v \in V} \operatorname*{Sup}_{q^* \in \mathscr{C}^*} L(v, q^*). \qquad (\mathscr{P})$$

Par définition, on appellera problème dual de $(\mathscr{P})$:

$$\operatorname*{Sup}_{q^* \in \mathscr{C}^*} \operatorname*{Inf}_{v \in V} L(v, q^*). \qquad (\mathscr{P}^*)$$

Explicitons $(\mathscr{P}^*)$:

$$\operatorname*{Inf}_{v \in V} L(v, q^*) = \operatorname*{Inf}_{v \in V} \{ \langle u^*, v \rangle + \langle Bv, q^* \rangle - \langle g, q^* \rangle \}.$$

Il est commode pour ce qui suit d'introduire l'adjoint B' de B qui est un opérateur linéaire continu de Y^* dans V^*. On a alors :

$$\operatorname*{Inf}_{v \in V} L(v, q^*) = \operatorname*{Inf}_{v \in V} \{ \langle u + B' q^*, v \rangle \} - \langle g, q^* \rangle$$

$$= \begin{cases} -\langle g, q^* \rangle & \text{si} \quad u^* + B' q^* = 0, \\ -\infty & \text{si} \quad u^* + B' q^* \neq 0, \end{cases}$$

(2) Dans tout ce qui suit, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représentera suivant le contexte le produit de dualité (V^*, V) ou (Y^*, Y).

et

$$\text{Sup}\{\langle -g, q^*\rangle \mid q^* \in \mathscr{C}^*, u^* + B' q^* = 0\}. \qquad (\mathscr{P}^*)$$

Le lemme suivant caractérise les points-selles de L.

LEMME 1.1 : *Le couple $(u, p^*) \in V \times \mathscr{C}^*$ est un point-selle du lagrangien L si et seulement si :*

(i) $$u \in K_g,$$

(ii) $$p^* \in \mathscr{C}^* \text{ et } u^* + B' p^* = 0,$$

(iii) $$\langle u^*, u\rangle = \langle -g, p^*\rangle.$$

Preuve : Par définition, si $(u, p^*) \in V \times \mathscr{C}^*$ est point-seile de L :

$$L(u, q^*) \leqq L(u, p^*) \leqq L(v, p^*), \qquad \forall (v, q^*) \in V \times \mathscr{C}^*.$$

De l'inégalité de gauche en faisant $q^* = 0$ et $q^* = 2p^*$, on déduit, $\mathscr{C}^*$ étant un cône :

$$\langle p^*, Bu - g\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle q^*, Bu - g\rangle \leqq 0, \quad \forall q^* \in \mathscr{C}^*, \qquad (1)$$

c'est-à-dire (i).

De l'inégalité de droite en faisant $v = 0$ et $v = 2u$, on déduit en utilisant la définition de B' :

$$\langle u^* + B' p^*, u\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle u^* + B' p^*, v\rangle = 0, \quad \forall v \in V, \qquad (2)$$

c'est-à-dire (ii). Enfin, grâce à (2) et (1) :

$$\langle u^*, u\rangle = -\langle B' p^*, u\rangle = -\langle p^*, Bu\rangle = \langle -g, p^*\rangle,$$

d'où (iii).

Réciproquement si (u, p^*) satisfait (i), (ii), (iii) alors on vérifie (1) et (2) et on en déduit que (u, p^*) est point-selle de L.

Le lemme 1.1 va permettre la démonstration, suivant un schéma adapté de Aubin [1], de la :

PROPOSITION 1.1 : *On suppose que le problème*

$$\text{Inf}\{\langle u^*, v\rangle \mid v \in K_g\}, \qquad (\mathscr{P})$$

où g est donné dans $\mathscr{C}$, admet une solution u et que $B' \mathscr{C}^*$ est fermé. Alors le problème

$$\text{Sup}\{\langle -g, q^*\rangle \mid q^* \in \mathscr{C}^*, u^* + B' q^* = 0\} \qquad (\mathscr{P}^*)$$

admet au moins une solution p^* et le couple (u, p^*) est point-selle de L.

Preuve : 1° Montrons que l'ensemble $\{q^* \in \mathscr{C}^* \mid B' q^* + u^* = 0\}$ est non vide (cette assertion jouera le rôle de l'hypothèse de qualification classique : *cf.* [5]). Par hypothèse, u étant solution de $(\mathscr{P})$, u vérifie :

$$\langle Bu - g, q^*\rangle \leqq 0, \qquad \forall q^* \in \mathscr{C}^*.$$

Une condition suffisante pour que $u+v$ appartienne à K_g est donc que

$$\langle Bv, q^* \rangle \leqq 0, \qquad \forall q^* \in \mathscr{C}^* \quad \Leftrightarrow \quad v \in (B'\mathscr{C}^*)^0 \quad (^3).$$

(En effet :

$$\langle B(u+v)-g, q^* \rangle = \langle Bu-g, q^* \rangle + \langle Bv, q^* \rangle \leqq 0, \forall q^* \in \mathscr{C}^*).$$

Dans ce cas l'élément $u+v$ est alors admissible pour le problème $(\mathscr{P})$ et :

$$\langle u^*, u+v \rangle \geqq \langle u^*, u \rangle, \qquad \forall v \in (B'\mathscr{C}^*)^0,$$

soit encore :

$$\langle -u^*, v \rangle \leqq 0, \qquad \forall v \in (B'\mathscr{C}^*)^0.$$

D'où, $B'\mathscr{C}^*$ étant fermé par hypothèse :

$$-u^* \in (B'\mathscr{C}^*)^{00} = \overline{B'\mathscr{C}^*} = B'\mathscr{C}^*.$$

C'est dire qu'il existe au moins un élément q_0^* de $\mathscr{C}^*$ tel que

$$B'q_0^* = -u^*, \qquad B'q_0^* + u^* = 0.$$

2° Montrons que le lagrangien L admet le couple (u, p^*) pour point-selle et que p^* est solution du problème $(\mathscr{P}^*)$. D'après le lemme 1.1, le couple (u, p^*) sera point-selle de L si et seulement si :

$$\left.\begin{aligned} & p^* \in \mathscr{C}^* \text{ et } B'p^* + u^* = 0, \\ & \langle u^*, u \rangle = \langle -g, p^* \rangle. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Considérons l'opérateur linéaire :

$$\Phi : \quad q^* \in Y^* \to (B'q^*, \langle -g, q^* \rangle) \in V^* \times \mathbf{R},$$

dont l'opérateur adjoint est :

$$\Phi' : \quad (v, \lambda) \in V \times \mathbf{R} \to Bv - \lambda g \in Y.$$

Trouver un élément p^* satisfaisant (3) équivaut donc à trouver un élément p^* de $\mathscr{C}^*$ solution de l'équation :

$$\Phi(p^*) = (-u^*, \langle u^*, u \rangle). \tag{4}$$

Les deux conditions :

(*a*) $\Phi\,\mathscr{C}^*$ est fermé,

(*b*) $\langle -u^*, v \rangle + \lambda \langle u^*, u \rangle \leqq 0$, $\forall (v, \lambda)$ tels que

$$\langle Bv - \lambda g, q^* \rangle \leqq 0, \qquad \forall q^* \in \mathscr{C}^*, \qquad \lambda \in \mathbf{R}^+$$

(qui généralisent les hypothèses du théorème de l'image fermée) sont suffisantes pour l'existence d'une telle solution.

---

(3) Si x est un cône de Z $X^0 = \{ z^* \in Z^* \mid \langle z^*, z \rangle \leqq 0, \forall z \in X \}$.

En effet (b) signifie, en introduisant le produit de dualité $\langle V^* \times \mathbf{R}, V \times \mathbf{R} \rangle$ que :

$$\langle -u^*, v \rangle + \lambda \langle u^*, u \rangle \leqq 0, \qquad \forall (v, \lambda) \in (\Phi \mathscr{C}^*)^0,$$

(se rappeler que $\Phi \mathscr{C}^* = B' \mathscr{C}^* \times \mathbf{R}^-$ si $g \in \mathscr{C}$) donc que $(-u^*, \langle u^*, u \rangle)$ appartient à $(\Phi \mathscr{C}^*)^{00}$ c'est-à-dire à $\Phi \mathscr{C}^*$ d'après (a).

Puisque g appartient à $\mathscr{C}$:

$$\Phi \mathscr{C}^* = B' \mathscr{C}^* \times \mathbf{R}^- \text{ qui est fermé par hypothèse.}$$

La condition (a) est donc satisfaite. Vérifions la condition (b).

Soit (v, λ) tels que :

$$\langle Bv - \lambda g, q^* \rangle \leqq 0, \qquad \forall q \in \mathscr{C}^*, \qquad \lambda \in \mathbf{R}^- \tag{5}$$

Supposons $\lambda > 0$, alors :

$$\langle Bv - \lambda g, q^* \rangle \leqq 0, \quad \forall q^* \in \mathscr{C}^* \iff \langle B\lambda^{-1} v - g, q^* \rangle \leqq 0, \quad \forall q^* \in \mathscr{C}^*,$$

l'élément $\lambda^{-1} v$ est donc admissible et puisque u est solution de $(\mathscr{P})$:

$$\langle u^*, u \rangle \leqq \langle u^*, \lambda^{-1} v \rangle \iff \langle -u^*, v \rangle + \lambda \langle u^*, u \rangle \leqq 0.$$

Dans le cas où $\lambda = 0$, il existe d'après 1° au moins un élément q_0^* de $\mathscr{C}^*$ tel que $B' q_0^* = -u^*$. D'où, puisque (v, λ) satisfait (5), en faisant $q^* = q_0^*$:

$$\langle -u^*, v \rangle = \langle B' q_0^*, v \rangle = \langle q_0^*, Bv \rangle \leqq 0;$$

et (b) en résulte.

Les conditions (a) et (b) étant satisfaites, l'équation (4) admet donc une solution p^* telle que (u, p^*) soit point-selle de L et en particulier p^* est solution de $(\mathscr{P}^*)$.

1.1.2. *Contraintes égalités*

Considérons maintenant la classe de problèmes :

$$\operatorname{Inf} \{ \langle u^*, v \rangle \mid v \in K_g \}, \tag{$\mathscr{P}$}$$

où

$$K_g = \{ v \in V \mid Bv = g \} \qquad \text{pour} \quad g \text{ donné dans } Y.$$

Le lagrangien associé au problème est ici défini par $L : V \times Y^* \to \overline{\mathbf{R}}$ où :

$$L(v, q^*) = \langle u^*, v \rangle + \langle Bv - g, q^* \rangle$$

et le problème $(\mathscr{P})$ peut encore s'écrire :

$$\operatorname*{Inf}_{v \in V} \operatorname*{Sup}_{q^* \in Y^*} L(v, q^*). \tag{$\mathscr{P}$}$$

Par des raisonnements identiques aux précédents, mais en remplaçant $\mathscr{C}^*$ par Y^*, on obtient le problème dual $(\mathscr{P}^*)$ de $(\mathscr{P})$:

$$\operatorname{Sup}\{\langle -g, q^*\rangle \mid q^* \in Y^*,\ u^* + B' q^* = 0\} \qquad (\mathscr{P}^*)$$

et la caractérisation suivante des points-selle de L :

LEMME 1.2 : *Le couple $(u, p^*) \in V \times Y^*$ est un point-selle du lagrangien L si et seulement si :*

(i) $$u \in K_g;$$

(ii) $$p^* \in Y^* \quad \text{et} \quad u^* + B' p^* = 0;$$

(iii) $$\langle u^*, u\rangle = \langle -g, p^*\rangle.$$

Du lemme 1.2 nous déduisons alors l'analogue de la proposition 1.1.

PROPOSITION 1.2 : *On suppose que le problème :*

$$\{\operatorname{Inf}\langle u^*, v\rangle \mid v \in K_g\}, \qquad (\mathscr{P})$$

où g est donné dans Y, admet une solution u et que l'image $R(B')$ de B' est fermé (4). *Alors le problème :*

$$\operatorname{Sup}\{\langle -g, q^*\rangle \mid q^* \in Y^*,\ u^* + B' q^* = 0\} \qquad (\mathscr{P}^*)$$

admet au moins une solution p^* et le couple (u, p^*) est point-selle de L.

Preuve : 1° Montrons que l'ensemble $\{q^* \in Y^* \mid B' q^* + u^* = 0\}$ est non vide.

Si u est solution de $(\mathscr{P})$, u appartient à K_g et

$$Bu - g = 0.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $u+v$ appartienne à K_g est donc que v appartienne à $\operatorname{Ker} B$.

(En effet :

$$B(u+v) - g = 0 \iff Bv + (Bu - g) = 0 \iff Bv = 0).$$

Dans ce cas l'élément $u+v$ est alors admissible pour le problème $(\mathscr{P})$ et

$$\langle u^*, u+v\rangle \geqq \langle u^*, u\rangle, \qquad \forall v \in \operatorname{Ker} B,$$

soit encore :

$$\langle u^*, v\rangle \geqq 0, \qquad \forall v \in \operatorname{Ker} B.$$

Changeant v en $-v$ ($\operatorname{Ker} B$ est un sous-espace vectoriel de V) on obtient de même :

$$\langle u^*, v\rangle \leqq 0, \qquad \forall v \in \operatorname{Ker} B.$$

(4) Si V et Y sont réflexifs $R(B')$ fermé $\Leftrightarrow$ $R(B)$ fermé (*cf.* Yosida [15]).

Il en résulte que $\langle u^*, v \rangle = 0, \forall v \in \text{Ker } B$, c'est-à-dire que

$$u^* \in (\text{Ker } B)^\perp.$$

Mais $R(B')$ étant fermé, on déduit de Ker $B = R(B')^\perp$:

$$(\text{Ker } B)^\perp = R(B')^{\perp\perp} = \overline{R(B')} = R(B').$$

Donc, u^* appartient à $R(B')$ et il existe ainsi au moins un q_0^* dans Y^* tel que $B' q_0^* + u^* = 0$.

2° Montrons que le lagrangien L admet le couple (u, p^*) pour point-selle et que p^* est solution du problème $(\mathscr{P}^*)$.

D'après le lemme 1.2 (u, p^*) sera point-selle de L si et seulement si :

$$\begin{aligned} &p^* \in Y^* \quad \text{et} \quad B' p^* + u^* = 0, \\ &\langle u^*, u \rangle = \langle -g, p^* \rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

En considérant toujours l'opérateur linéaire :

$$\Phi : \quad q^* \in Y^* \to (B' q^*, \langle -g, q^* \rangle) \in V^* \times \mathbf{R}$$

dont l'opérateur adjoint est

$$\Phi' : \quad (v, \lambda) \in V \times \mathbf{R} \to B v - \lambda g \in Y,$$

l'existence d'un élément p^* de Y^* satisfaisant (6) revient à résoudre l'équation :

$$\Phi(p^*) = (-u^*, \langle u^*, u \rangle). \tag{7}$$

L'existence d'une solution de (7) est assurée par le théorème de l'image fermée dont il suffit de vérifier les hypothèses :

(α) $R(\Phi)$ est fermé;

(β) $(-u^*, \langle u^*, u \rangle)$ appartient à l'orthogonal de Ker Φ'.

Mais $R(\Phi) = R(B') \times \mathbf{R}$ qui est fermé par l'hypothèse. D'autre part :

$$\text{Ker } \Phi' = \{(v, \lambda) \in V \times \mathbf{R}, B v - \lambda g = 0\} = \{(v, 0), B v = 0\}.$$

Pour (v, λ) dans Ker Φ', on a alors puisque grâce à 1°, il existe au moins un q_0^* dans Y^* tel que $B' q_0^* = -u^*$:

$$\langle (-u^*, \langle u^*, u \rangle), (v, \lambda) \rangle$$

$$= \langle (-u^*, \langle u^*, u \rangle), (v, 0) \rangle = \langle -u^*, v \rangle = \langle B' q_0^*, v \rangle = \langle q_0^*, B v \rangle = 0.$$

Les conditions (α) et (β) étant satisfaites, l'équation (7) admet donc une solution p^* telle que (u, p^*) soit point-selle de L et en particulier p^* est solution de $(\mathscr{P}^*)$.

1.2. Remarques sur l'existence et l'unicité de points-selles

Les théorèmes du type Kuhn-Tucker énoncés au paragraphe 1 (prop. 1.1 et 1.2) vont permettre d'énoncer des conditions suffisantes d'existence et d'unicité pour des problèmes de points-selles associés à certaines inéquations variationnelles.

Le cadre et les notations étant les mêmes qu'au paragraphe 1 on se donne de plus un opérateur A (éventuellement non linéaire) de V dans V^* et un élément f de V^*.

1.2.1. *Contraintes inégalités*

THÉORÈME 1.1 : *On suppose que $B'\,\mathscr{C}^*$ est fermé et que g appartient à $\mathscr{C}$. Soit $K_g = \{ v \in V \mid Bv \leqq g \}$. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

(i) *Le problème*

$$\left.\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in K_g \text{ tel que} \\ \langle A(u), v-u \rangle \geqq \langle f, v-u \rangle, \qquad \forall v \in K_g\end{array}\right\} \tag{$\mathscr{I}_1$}$$

possède au moins une solution.

(ii) *Le problème*

$$\left.\begin{array}{l}\text{Trouver } (u, p^*) \in V \times \mathscr{C}^* \text{ tel que} \\ \langle A(u), v \rangle + \langle B' p^*, v \rangle = \langle f, v \rangle, \qquad \forall v \in V \\ \langle Bu, q^* \rangle \leqq \langle g, q^* \rangle \qquad \forall q^* \in \mathscr{C}^*\end{array}\right\} \tag{$\mathscr{I}_1^*$}$$

possède au moins une solution; si de plus $\operatorname{Ker} B' = \{ 0 \}$, *$p^*$ est unique.*

Preuve : Soit u une solution de $(\mathscr{I}_1)$; posons $u^* = A(u) - f$. Alors $(\mathscr{I}_1)$ peut encore s'écrire :

Trouver $u \in K_g$ tel que

$$\langle u^*, u \rangle \leqq \langle u^*, v \rangle, \qquad \forall v \in K_g$$

et u est donc solution du problème :

$$\operatorname{Inf} \{ \langle u^*, v \rangle \mid v \in K_g \}. \tag{$\mathscr{P}$}$$

Nous pouvons alors, compte tenu des hypothèses, appliquer la proposition 1.1; nous en déduisons l'existence d'un point-selle $(u, p^*) \in V \times \mathscr{C}^*$ du lagrangien associé à $(\mathscr{P})$, c'est-à-dire que

$$L(u, q^*) \leqq L(u, p^*) \leqq L(v, p^*), \qquad \forall (v, q^*) \in V \times \mathscr{C}^*.$$

Il résulte de ces deux inégalités, sachant que l'on a posé $u^* = A(u) - f$, que (u, p^*) est solution de $(\mathscr{I}_1^*)$.

Réciproquement, si $(u, p^*) \in V \times \mathscr{C}^*$ est solution de $(\mathscr{I}_1^*)$, u est solution de $(\mathscr{I}_1)$, d'après la définition de $\mathscr{C}^*$ et K_g.

Enfin notons que p^* satisfait nécessairement, s'il existe :

$$B' p^* + u^* = 0.$$

Il en résulte (par l'absurde) que p^* est unique dès que Ker $B' = \{ 0 \}$.

1.2.2. *Contraintes égalités*

THÉORÈME 1.2 : *On suppose que $R(B')$ est fermé et que g appartient à Y. Soit $K_g = \{ v \in V \mid B v = g \}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le problème :*

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K_g \text{ tel que} \\ \langle A(u), v-u \rangle \geqq \langle f, v-u \rangle, \qquad \forall v \in K_g \end{array}\right\} \qquad (\mathscr{I}_2)$$

possède au moins une solution.

(ii) *Le problème :*

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p^*) \in V \times Y^* \text{ tel que} \\ \langle A(u), v \rangle + \langle B' p^*, v \rangle = \langle f, v \rangle, \qquad \forall v \in V, \\ \langle B u, q^* \rangle = \langle g, q^* \rangle, \qquad \forall q^* \in Y^* \end{array}\right\} \qquad (\mathscr{I}_2^*)$$

possède au moins une solution; si de plus Ker $B' = \{ 0 \}$, *p^* est unique.*

Preuve : Elle s'effectue de la même façon que pour le théorème 1.1 en utilisant cette fois la proposition 1.2.

Remarques : 1° Dans le cas où Ker $B' \neq \{ 0 \}$ si (u, p^*) est une solution de $\mathscr{I}_1^*$ (resp. $\mathscr{I}_2^*$), tous les couples $(u, p^* + r^*)$ où r^* décrit Ker B' sont solutions de $\mathscr{I}_1^*$ (resp. $\mathscr{I}_2^*$). Cela résulte clairement des démonstrations des théorèmes 1.1 et 1.2.

2° Le problème $(\mathscr{I}_2)$ peut encore s'écrire :
Trouver $u \in K_g$ tel que

$$\langle A(u), v \rangle = \langle f, v \rangle, \qquad \forall v \in K_0 = \text{Ker } B.$$

3° L'existence d'au moins une solution de $(\mathscr{I}_1)$ où $(\mathscr{I}_2)$ est, sous certaines hypothèses sur A et sur K_g (satisfaites dès que B est linéaire continu), un résultat classique (*cf.* Lions [9]).

4° La démonstration du théorème 1.1 a utilisé de façon essentielle l'appartenance de g à $\mathscr{C}$. Cette hypothèse peut ne pas être satisfaite dans les exemples (*cf.* problème avec obstacle, exemple 1 du chapitre 3).

Les résultats précédents s'appliquent cependant encore en partie si l'on suppose de plus que $A(u) - f$ appartient à un espace de Hilbert H s'injectant continûment et dense dans V^* : ceci sera détaillé dans l'exemple 1, (chap. 3).

1.3. Un lemme d'analyse fonctionelle

Terminons ce chapitre par un lemme qui sera utile lors de l'étude de l'approximation du problème $(\mathscr{I}_2^*)$:

LEMME 1.3 : *Soit V un espace de Banach réflexif.*

Soit Y un espace de Banach réflexif, strictement convexe ainsi que son dual.
Soit B un opérateur linéaire continu de V dans Y.
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *B est surjectif et admet un relèvement continu* (5) *tel que*

$$\| R \| \leqq \frac{1}{k}, \qquad k > 0,$$

(ii)
$$\gamma(B') = \inf_{p^* \in Y^* - \{0\}} \frac{\| B' p^* \|}{\| p^* \|} > 0$$

et Ker B *admet un supplémentaire topologique* (6).

Preuve : Les espaces V et Y étant métrisables et complets, B est surjectif si et seulement si Ker $B' = \{ 0 \}$ et $R(B')$ est faiblement fermé c'est-à-dire fermé. De plus dire que B est linéaire continu surjectif équivaut à dire que B est un homomorphisme surjectif. Or un homomorphisme surjectif admet un relèvement continu si et seulement si Ker B admet un supplémentaire topologique (*cf.* Trèves [14], p. 543). Donc dire que B est linéaire continu surjectif et admet un relèvement continu équivaut à dire que Ker B admet un supplémentaire topologique, Ker $B' = \{ 0 \}$ et $R(B')$ est fermé. Mais ces deux dernières conditions équivalent à $\gamma(B') > 0$ (*cf.* Kato [8], p. 231).

Notons alors que $\gamma(B') > 0$ équivaut à dire qu'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\| B' p^* \| \geqq k \| p^* \|.$$

D'après les hypothèses sur Y, il existe une application de dualité $J : Y \to Y^*$ admettant un inverse J^{-1}. Définissons $\tilde{v} = R J^{-1}(p^*)$ où $p^* \in Y^*$ et supposons que $\| R \| \leqq 1/k$, $k > 0$. Alors :

$$\| B' p^* \| = \sup_{v \in V} \frac{\langle B' p^*, v \rangle}{\| v \|}$$

$$\geqq \frac{\langle B' p^*, \tilde{v} \rangle}{\| \tilde{v} \|} = \frac{\langle p^*, BRJ^{-1}(p^*) \rangle}{\| RJ^{-1}(p^*) \|} \geqq \frac{\| p^* \| . \| J^{-1}(p^*) \|}{\| R \| . \| J^{-1}(p^*) \|},$$

soit :

$$\| B' p^* \| \geqq k \| p^* \|.$$

Inversement si (ii) est satisfait, B est surjectif et admet un relèvement continu d'après ce qui précède et il résulte de l'inégalité ci-dessus que

$$\| R \| = \| R' \| \leqq \frac{1}{k}.$$

---

(5) C'est-à-dire un opérateur linéaire R continu tel que $B \circ R = \mathrm{Id}_Y$.
(6) C'est-à-dire qu'il existe un sous-espace x tel que $V = \mathrm{Ker}\, B \oplus X$; il revient au même de dire que la projection sur Ker B est continue.

Remarques : 1° Si V est un espace de Hilbert, Ker B admet toujours un supplémentaire topologique qui est l'orthogonal de Ker B; mais l'étude des problèmes non linéaires nous force à considérer des espaces de Banach.

2° (i) est une propriété de stabilité qui sera utilisée dans le chapitre 2, paragraphe 2.

2. RÉSULTATS D'APPROXIMATION DE POINTS-SELLES

2.1. Étude de l'approximation du problème $(\mathscr{I}_1)$: contraintes linéaires inégalités

Nous abordons dans ce paragraphe l'approximation des problèmes $(\mathscr{I}_1)$ et $(\mathscr{I}_1^*)$.

Une approximation de $(\mathscr{I}_1)$ est obtenue en se donnant :

- un sous-espace fermé V_h de V;
- un sous-ensemble convexe fermé K_g^h de V_h, « approchant » K_g.

On considère alors le problème discret associé à $(\mathscr{I}_1)$.

Trouver $u_h \in K_g^h$ tel que

$$\langle A(u_h), v_h - u_h \rangle \geqq \langle f, v_h - u_h \rangle, \qquad \forall v_h \in K_g^h. \tag{$\mathscr{I}_1)_h$}$$

La formulation $(\mathscr{I}_1^*)$ du problème $(\mathscr{I}_1)$ (qui est équivalente d'après le théorème 1.1) permet une démonstration simple et naturelle d'une estimation *a priori* utile pour l'approximation du problème $(\mathscr{I}_1)$. En particulier, cette estimation, qui généralise un résultat démontré par Brezzi-Sacchi [4], Falk [6] dans le cas où $B = -\mathrm{Id}$, est à la base de la majoration de l'erreur $u - u_h$. Nous avons cependant supposé que g appartient à $\mathscr{C}$, ce qui peut être restrictif (*cf* 1.2, remarque 3).

PROPOSITION 2.1 : *Sous les hypothèses du théorème* 1.1, *en supposant que le problème* $(\mathscr{I}_1)$ *admet une solution* u *et que le problème* $(\mathscr{I}_1)_h$ *admet une solution* u_h, *l'estimation* a priori *suivante est satisfaite :*

$$\langle A(u) - A(u_h), u - u_h \rangle \leqq \langle A(u) - A(u_h), u - v_h \rangle + \langle p^*, Bu_h - Bv \rangle + \langle p^*, Bu - Bv_h \rangle \; \forall v \in K_g, \; \forall v_h \in K_g^h.$$

Preuve : Les hypothèses du théorème 1.1 étant satisfaites, si u est solution de $(\mathscr{I}_1)$, il existe un élément p^* de $\mathscr{C}^*$ tel que (u, p^*) soit solution de $(\mathscr{I}_2)$. En particulier, (u, p^*) satisfait :

$$\langle A(u), v \rangle + \langle p^*, Bv \rangle = \langle f, v \rangle, \qquad \forall v \in V, \tag{1}$$

$$\langle Bu, q^* \rangle \leqq \langle g, q^* \rangle \qquad \forall q \in \mathscr{C}^*. \tag{2}$$

Dans la première équation choisissons $v = v_h - u_h$ et soustrayons $\langle A(u_h), v_h - u_h \rangle \geqq \langle f, v_h - u_h \rangle$ au résultat; il vient :

$$\langle A(u) - A(u_h), v_h - u_h \rangle \leqq \langle p^*, Bu_h - Bv_h \rangle. \tag{3}$$

Mais puisque $\langle p^*, Bu-g \rangle = 0$ et $\langle p^*, Bv-g \rangle \leqq 0$ (*cf.* la preuve du lemme 1.1) :

$$\langle p^*, Bu_h - Bv_h \rangle \leqq \langle p^*, Bu_h - Bv \rangle + \langle p^*, Bu - Bv_h \rangle. \tag{4}$$

L'estimation cherchée résulte alors de (3) et (4) et

$$\langle A(u)-A(u_h), u-u_h \rangle = \langle A(u)-A(u_h), u-v_h \rangle + \langle A(u)-A(u_h), v_h-u_h \rangle.$$

2.2. Approximation des problèmes $(\mathcal{J}_2)$ et $(\mathcal{J}_2^*)$: contraintes linéaires égalités

Dans tout ce qui suit, nous étudierons exclusivement les problèmes $(\mathcal{J}_2)$ et $(\mathcal{J}_2^*)$ c'est-à-dire les problèmes correspondant au convexe :

$$K_g = \{ v \in V \mid Bv = g \} \qquad \text{où } g \text{ est donné dans } Y.$$

On supposera également que V et Y sont des espaces de Banach réflexifs Y étant uniformément convexe ainsi que son dual de façon à pouvoir appliquer le lemme 1.3.

La proposition suivante est un corollaire du théorème 1.2.

PROPOSITION 2.2 : *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout (f, g) de $V^* \times Y$ le problème $(\mathcal{J}_2)$ possède au moins une solution u dans K_g (resp. une solution unique) et B est surjectif.*

(ii) *Pour tout (f, g) de $V^* \times Y$ le problème $(\mathcal{J}_2^*)$ possède au moins une solution (u, p^*) dans $V \times Y^*$, p^* étant unique [resp. une solution (u, p^*) dans $V \times Y^*$ unique].*

Preuve : On a vu (*cf.* la preuve du lemme 1.3) que B surjectif équivaut à $R(B')$ fermé et $\operatorname{Ker} B' = \{ 0 \}$. Nous sommes donc dans le cadre d'application du théorème 1.2 et (i) entraîne (ii).

Réciproquement si (ii) est satisfait, pour tout g de Y il existera au moins un u de V tel que $Bu = g$: B est surjectif; de plus si (u, p^*) est solution de $(\mathcal{J}_2^*)$, u est solution de $(\mathcal{J}_2)$.

La proposition 2.2 énoncée dans le cas d'un opérateur A linéaire ou non généralise un résultat de Brezzi [3] obtenu par une démonstration différente. Elle ne précise cependant pas la dépendance de la solution (u, p^*) en fonction des données (f, g). Moyennant des hypothèses convenables sur A et B, nous allons préciser cette dépendance et énoncer des résultats utiles pour l'approximation numérique. Nos hypothèses sur A, correspondant par exemple à des opérateurs du type :

$$A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \qquad \text{où } \alpha \geqq 2$$

sont les suivantes :

(A_1) A est hémicontinu de V dans V^*;

(A_2) Il existe $\beta > 0$ et $\alpha \geqq 2$ tels que :

$$\langle A(u)-A(v),\, u-v\rangle \geqq \beta \|u-v\|^{\alpha}, \qquad \forall u, v \in K_g ;$$

(A_3) Il existe $\gamma > 0$ et $\alpha \geqq 2$ tels que :

$$\|A(u)-A(v)\| \leqq \gamma(\|u\|+\|v\|)^{\alpha-2}\|u-v\|, \qquad \forall u, v \in V;$$

Remarque : On pourrait traiter de la même façon le cas $1 < \alpha \leqq 2$ avec

$$(\|u\|+\|v\|)^{2-\alpha}\langle A(u)-A(v),\, u-v\rangle \geqq \beta\|u-v\|^2$$

et

$$\|A(u)-A(v)\| \leqq \gamma\|u-v\|^{\alpha-1}.$$

Nos hypothèses sur B sont les suivantes (*cf.* lemme 1.3) :

$$\text{Il existe } k > 0 \quad \text{tel que} \quad \|B' p^*\| \geqq k\|p^*\| \qquad (B_1)$$

et Ker B admet un supplémentaire topologique dans V.

2.2.1. *Existence et stabilité de la solution du problème* $(\mathscr{I}_2^*)$

Les deux propositions suivantes précisent les propriétés de la solution du problème $(\mathscr{I}_2^*)$.

PROPOSITION 2.3 : *On suppose que* (A_1), (A_2), (A_3) *et* (B_1) *sont satisfaits. Soit* (f, g) *appartenant à* $V^* \times Y$ *avec* $\|f\| \leqq M_1$, $\|g\| \leqq M_2$. *Alors le problème* $(\mathscr{I}_2^*)$ *admet une solution unique* (u, p^*) *et*

$$\|u\|_V \leqq \frac{1}{\beta}\left(M_1+\gamma\left(\frac{M_2}{k}\right)^{\alpha-1}\right)^{1/\alpha-1}+\frac{M_2}{k} = \mathscr{M},$$

$$\|p^*\|_{Y^*} \leqq \frac{1}{k}(M_1+\gamma\mathscr{M}^{\alpha-1}) = \mathscr{N}.$$

Preuve : Grâce à (B_1), B est surjectif en vertu du lemme 1.3. Grâce à (A_1), (A_2), (A_3) le problème $(\mathscr{I}_2)$ admet une solution unique u (*cf.* [9]). Il résulte alors de la proposition 2.2 que le problème $(\mathscr{I}_2^*)$ admet une solution unique (u, p^*) dans $V \times Y^*$.

1° D'après (B_1) et le lemme 1.3, il existe w dans K_g tel que

$$Bw = g \quad \|w\| \leqq \frac{1}{k}\|g\| \leqq \frac{M_2}{k}.$$

Puisque u est solution de $(\mathscr{I}_1)$, u appartient à K_g et

$$\langle A(u), v\rangle = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in K_0 = \operatorname{Ker} B. \qquad (1)$$

De (1), en prenant $v = u-w$, on déduit :

$$\langle A(u)-A(w),\, u-w\rangle = \langle f, u-w\rangle - \langle A(w),\, u-w\rangle,$$

soit d'après les hypothèses sur f et g et (A_1), (A_3) :

$$\beta \| u-w \|^{\alpha} \leqq M_1 \| u-w \| + \| A(w) \| . \| u-w \|,$$

d'où :

$$\| u-w \| \leqq \frac{1}{\beta} \left(M_1 + \gamma \left(\frac{M_2}{k} \right)^{\alpha-1} \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Il en résulte que :

$$\| u \| \leqq \| u-w \| + \| w \| \leqq \frac{1}{\beta} \left(M_1 + \gamma \left(\frac{M_2}{k} \right)^{\alpha-1} \right)^{1/(\alpha-1)} + \frac{M_2}{k}. \qquad (2)$$

2° L'élément p^* satisfait :

$$\langle p^*, Bv \rangle = \langle f, v \rangle - \langle A(u), v \rangle, \qquad \forall v \in V,$$

soit d'après (A_3) et (2) :

$$\langle p^*, Bv \rangle \leqq M_1 \| v \| + \gamma \mathcal{M}^{\alpha-1} \| v \|.$$

D'où grâce à (B_1) :

$$\| p^* \| \leqq \frac{1}{k} \sup_v \frac{\langle B' p^*, v \rangle}{\| v \|} = \frac{1}{k} \sup_v \frac{\langle p^*, Bv \rangle}{\| v \|} \leqq \frac{1}{k} (M_1 + \gamma \mathcal{M}^{\alpha-1}).$$

Considérons à présent le problème :

Trouver $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ tel que

$$\left.\begin{aligned} \langle A(\bar{u}), v \rangle + \langle B' \bar{p}^*, v \rangle &= \langle \bar{f}, v \rangle, \qquad \forall v \in V, \\ \langle B\bar{u}, q^* \rangle &= \langle \bar{g}, q^* \rangle \qquad \forall q^* \in Y^*, \end{aligned}\right\} \qquad (\bar{\mathcal{F}}_2^*)$$

où $(\bar{f}, \bar{g})$ appartient à $V^* \times Y$ et $\| \bar{f} \| \leqq \bar{M}_1$, $\| \bar{g} \| \leqq \bar{M}_2$.

Sous les hypothèses de la proposition 2.3 le problème $(\bar{\mathcal{F}}_2^*)$ admet une solution $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ unique et les estimations suivantes sont satisfaites :

$$\| \bar{u} \| \leqq \frac{1}{\beta} \left(\bar{M}_1 + \gamma \left(\frac{\bar{M}_2}{k} \right)^{\alpha-1} \right)^{1/(\alpha-1)} + \frac{\bar{M}_2}{k} = \bar{\mathcal{M}},$$

$$\| \bar{p}^* \| \leqq \frac{1}{k} (M_1 + \gamma \bar{\mathcal{M}}^{\alpha-1}) = \bar{\mathcal{N}}.$$

La proposition suivante montre que la solution de $(\mathcal{F}_2^*)$ dépend continûment des données (f, g).

PROPOSITION 2.4 : *Sous les hypothèses de la proposition* 2.3, *soient* $(\bar{f}, \bar{g}) \in V^* \times Y$ *tel que* $\| \bar{f} \| \leqq \bar{M}_1$, $\| \bar{g} \| \leqq \bar{M}_2$. *Alors il existe* $\mathcal{K}$ *et* $\mathcal{K}'$ *constantes positives ne dépendant que de* α, β, γ, M_1, M_2, $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ *telles que :*

$$\| u-\bar{u} \| + \| p^*-\bar{p}^* \| \leqq \mathcal{K} \| f-\bar{f} \| + \mathcal{K}' \| g-\bar{g} \|,$$

où (u, p^*) *et* $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ *sont respectivement solutions de* $(\mathcal{F}_2^*)$ *et* $(\bar{\mathcal{F}}_2^*)$.

Preuve : (u, p^*) vérifie :

$$\langle A(u), v\rangle + \langle B'(p^*), v\rangle = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in V, \tag{1}$$

$$\langle B(u), q^*\rangle = \langle g, q^*\rangle, \qquad \forall q^* \in Y, \tag{2}$$

(u, p^*) vérifie :

$$\langle A(\bar{u}), v\rangle + \langle B'(\bar{p}^*), v\rangle = \langle \bar{f}, v\rangle, \qquad \forall v \in V, \tag{3}$$

$$\langle B(\bar{u}), q^*\rangle = \langle \bar{g}, q^*\rangle, \qquad \forall q^* \in Y^*. \tag{4}$$

Soustrayons membre à membre (1) et (3), on a

$$\langle B'(p^* - \bar{p}^*), v\rangle = \langle f - \bar{f}, v\rangle - \langle A(u) - A(\bar{u}), v\rangle, \qquad \forall v \in V.$$

Or d'après la proposition 2.3 et puisque

$$\|f\| \leqq \bar{M}_1, \ \|\bar{g}\| \leqq \bar{M}_2, \|u\| \leqq \mathcal{M}, \|\bar{u}\| \leqq \bar{\mathcal{M}},$$

donc grâce à (A_3) :

$$\langle B'(p^* - \bar{p}^*), v\rangle \leqq \|f - \bar{f}\| \cdot \|v\| + \gamma(\mathcal{M} + \bar{\mathcal{M}})^{\alpha-2} \|u - \bar{u}\| \cdot \|v\|.$$

D'où, d'après (B_1) :

$$\|p - \bar{p}^*\| \leqq \frac{1}{k}(\|f - \bar{f}\| + \gamma(\mathcal{M} + \bar{\mathcal{M}})^{\alpha-2} \|u - \bar{u}\|) \tag{5}$$

Mais

$$u \in K_g \iff B(u) = g,$$

$$\bar{u} \in K_{\bar{g}} \iff B(\bar{u}) = \bar{g},$$

soit d'après (B_1) et le lemme 1.3

$$\|u - \bar{u}\| \leqq \frac{1}{k}\|g - \bar{g}\|. \tag{6}$$

Finalement :

$$\|u - \bar{u}\| + \|p^* - \bar{p}^*\| \leqq \frac{1}{k}\left\{\|f - \bar{f}\| + \left(\frac{\gamma}{k}(\mathcal{M} + \bar{\mathcal{M}})^{\alpha-2} + 1\right)\|g - \bar{g}\|\right\}.$$

2.2.2. *Approximation du problème* $(\mathcal{F}_2^*)$

Soit V_h et Y_h^* deux sous-espaces fermés de V et Y^* respectivement. Considérons le problème $(\mathcal{F}_2^*)_h$ approximation du problème $(\mathcal{F}_2^*)$.

Trouver $(u_h, p_h^*) \in V_h \times Y_h^*$ *tel que,*

$$\left.\begin{aligned} \langle A(u_h), v_h\rangle + \langle B'(p_h^*), v_h\rangle &= \langle f, v_h\rangle, \qquad \forall v_h \in V_h, \\ \langle B(u_h), q_h^*\rangle &= \langle g, q_h^*\rangle \qquad \forall q_h^* \in Y_h^*. \end{aligned}\right\} \tag{$\mathcal{F}_2^*)_h$}$$

Notons :

$$K_0^h = \{v_h \in V_h \mid B(v_h) = 0\},$$

$$K_g^h = \{v_h \in V_h \mid B(v_h) = g\}.$$

Précisons le lien entre le problème $(\mathscr{I}_2^*)_h$ et le problème $(\mathscr{I}_2)_h$: $(\mathscr{I}_2)_h$

Trouver $u_h \in K_g^h$ tel que

$$\langle A(u_h), v_h \rangle = \langle f, v_h \rangle, \qquad \forall v_h \in K_0^h .$$

PROPOSITION 2.5 : *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *Pour tout (f, g) de $V^* \times Y$ le problème $(\mathscr{I}_2)_h$ possède au moins une solution u_h dans K_g^h (resp. une solution unique) et B est surjectif.*

(ii) *Pour tout (f, g) de $V^* \times Y$ le problème $(\mathscr{I}_2^*)_h$ possède au moins une solution (u_h, p_h^*) dans $V_h \times Y_h^*$, p_h^* étant unique (resp. une solution (u_h, p_h^*) dans $V_h \times Y_h^*$ unique).*

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.2.

La proposition 2.5 ramène ainsi l'étude du problème $(\mathscr{I}_2)_h$ à celle du problème $(\mathscr{I}_2^*)_h$. Pour effectuer l'étude du problème $(\mathscr{I}_2^*)_h$, en particulier pour énoncer un résultat de majoration d'erreur, nous aurons besoin d'hypothèses supplémentaires mais naturelles sur le choix de l'approximation de $(\mathscr{I}_2^*)$.

Ces hypothèses sont les suivantes :

Il existe $\tilde{\beta} > 0$, *indépendant de* h tel que

$$\langle A(u_h) - A(v_h), u_h - v_h \rangle \geqq \tilde{\beta} \| u_h - v_h \|^\alpha, \qquad \forall u_h, v_h \in K_g^h; \qquad \alpha \geqq 2. \quad (A_2^h)$$

Il existe $\tilde{\gamma} > 0$, *indépendant de* h tel que

$$\| A(u_h) - A(v_h) \| \leqq \tilde{\gamma} (\| u_h \| + \| v_h \|)^{\alpha - 2} \| u_h - v_h \|, \quad \forall u_h, v_h \in V_h; \qquad \alpha \geqq 2. \quad (A_3^h)$$

Il existe $\tilde{k} > 0$ *indépendant de* h tel que

$$\| B' p_h^* \| \geqq \tilde{k} \| p_h^* \| \quad (B_1^h)$$

et K_0^h admet un supplémentaire topologique dans V_h.

Remarques : 1° Si dim $V_h < +\infty$, K_0^h admet toujours un supplémentaire topologique.

2° L'hypothèse (B_1^h) est une hypothèse de stabilité qui peut être techniquement longue à vérifier dans les exemples (*cf.* [12]).

Nous avons alors le résultat de stabilité suivant :

PROPOSITION 2.6 : *On suppose que (A_1), (A_2^h), (A_3^h), (B_1^h) sont satisfaits. Soit (f, g) appartenant à $V^* \times Y$ avec $\| f \| \leqq M_1$, $\| g \| \leqq M_2$. Alors le problème $(\mathscr{I}_2^*)_h$ admet une solution unique (u_h, p_h^*) et*

$$\| u_h \| \leqq \frac{1}{\tilde{\beta}} \left(M_1 + \tilde{\gamma} \left(\frac{M_2}{\tilde{k}} \right)^{\alpha - 1} \right)^{1/(\alpha - 1)} + \frac{M_2}{\tilde{k}} = \tilde{\mathscr{M}},$$

$$\| p_h^* \| \leqq \frac{1}{\tilde{k}} (M_1 + \tilde{\gamma} \tilde{\mathscr{M}}^{\alpha - 1}) = \tilde{\mathscr{N}}.$$

Preuve : C'est une conséquence immédiate, compte tenu des hypothèses, de la proposition 2.3.

Énonçons enfin un résultat de majoration d'erreur.

THÉORÈME 2.1 : *On suppose que* (A_1), (A_2), (A_3), (B_1), (A_2^h), (A_3^h), (B_1^h) *sont satisfaits.*

Soit (f, g) *appartenant à* $V^* \times Y$ *avec* $\|f\| \leqq M_1$, $\|g\| \leqq M_2$.

Soit (u, p^*) *la solution de* $(\mathscr{S}_2^*)$.

Soit (u_h, p_h^*) *la solution de* $(\mathscr{S}_2^*)_h$.

Alors il existe deux constantes positives $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{C}'$ *indépendantes de* h *telles que*

$$\|u-u_h\| + \|p^*-p_h^*\|$$
$$\leqq \mathscr{C}\left(\operatorname{Inf}_{v_h}\|u-v_h\|\right)^{1/(\alpha-1)} + \mathscr{C}' \operatorname{Max}\left\{\left(\operatorname{Inf}_{q_h^*}\|p^*-q_h^*\|\right)^{1/(\alpha-1)}, \operatorname{Inf}_{q_h^*}\|p^*-q_h^*\|\right\}.$$

Preuve : A) u_h est solution de $(\mathscr{S}_2)_h$ donc satisfait :

$$\langle A(u_h), v_h\rangle = \langle f, v_h\rangle, \qquad \forall v_h \in K_0^h. \tag{1}$$

D'après (B_1^h), et le lemme 1.3 il existe w_h dans K_g^h tel que

$$B w_h = g, \quad \|w_h\| \leqq \frac{1}{\tilde{k}}\|g\| \leqq \frac{M}{\tilde{k}}.$$

Prenons alors $v_h = u_h - w_h$ dans (1) (ce qui est licite car $v_h \in K_0^h$) et soustrayons membre à membre $\langle A(w_h), u_h - w_h\rangle$.

Il vient :

$$\langle A(u_h)-A(w_h), u_h-w_h\rangle = \langle f, u_h-w_h\rangle - \langle A(w_h), u_h-w_h\rangle. \tag{2}$$

Mais $u_h - w_h \in K_0^h \subset V$ et u est solution de $(\mathscr{S}_2^*)$:

$$\langle A(u), u_h-w_h\rangle + \langle B'(p^*), u_h-w_h\rangle = \langle f, u_h-w_h\rangle. \tag{3}$$

Soit, par (2) et (3) :

$$\langle A(u_h)-A(w_h), u_h-w_h\rangle = \langle A(u)-A(w_h), u_h-w_h\rangle + \langle B'(p^*), u_h-w_h\rangle. \tag{4}$$

Or, pour tout $q_h^* \in Y_h^*$:

$$\begin{aligned} u_h - w_h \in K_h^0 &\Rightarrow B(u_h-w_h) = 0 \\ &\Rightarrow \langle B'(q_h^*), u_h-w_h\rangle = \langle q_h^*, B(u_h-w_h)\rangle = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Donc (4) s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle A(u_h)-A(w_h), u_h-w_h\rangle = \langle A(u)-A(w_h), u_h-w_h\rangle \\ + \langle B'(p^*-q_h^*), u_h-w_h\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

Mais

$$\| w_h \| \leqq \frac{M_2}{\tilde{k}} \qquad \text{et} \qquad \| u \| \leqq \mathcal{M},$$

grâce à la proposition 2.3; alors, grâce à (A_h^2), (A_h^3) :

$$\tilde{\beta} \| u_h - w_h \|^{\alpha} \leqq \tilde{\gamma} (\| u \| + \| w_h \|)^{\alpha-2} \| u - w_h \| \cdot \| u_h - w_h \| + \| B' \| \, \| p^* - q_h^* \| \cdot \| u_h - w_h \|.$$

Soit encore :

$$\| u_h - w_h \|^{\alpha-1} \leqq \frac{1}{\tilde{\beta}} \left\{ \tilde{\gamma} \left(\mathcal{M} + \frac{M_2}{\tilde{k}} \right)^{\alpha-2} \| u - w_h \| + \| B' \| \cdot \| p^* - q_h^* \| \right\}.$$

D'où grâce à la relation $(X+Y)^{\alpha-1} \leqq \text{Max}\,(1, 2^{\alpha-2})\,(X^{\alpha-1} + Y^{\alpha-1})$:

$$\| u - u_h \|^{\alpha-1} \leqq C(\alpha-1) \{ \| u - w_h \|^{\alpha-1} + \| u_h - w_h \|^{\alpha-1} \}$$

$$\leqq C(\alpha-1) \left\{ \| u - w_h \|^{\alpha-1} + \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}} \left(\mathcal{M} + \frac{M_2}{\tilde{k}} \right)^{\alpha-2} \times \| u - w_h \| + \frac{\| B' \|}{\tilde{\beta}} \| p^* - q_h^* \| \right\}. \qquad (7)$$

Soit, puisque

$$\| u \| \leqq \mathcal{M}, \; \| w_h \| \leqq \frac{M_2}{\tilde{k}},$$

$$\| u - u_h \|^{\alpha-1} \leqq C(\alpha-1) \left\{ \left[\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}} \left(\mathcal{M} + \frac{M_2}{\tilde{k}} \right)^{\alpha-2} + C(\alpha-2)\, \mathcal{M}^{\alpha-2} + C(\alpha-2) \left(\frac{M_2}{\tilde{k}} \right)^{\alpha-2} \right] \times \| u - w_h \| + \frac{\| B' \|}{\tilde{\beta}} \| p^* - q_h^* \| \right\} \qquad (8)$$

et cela pour tout w_h de K_g^h et tout q_h^* de Y_h^*.

B) Montrons que $\| u - w_h \| \leqq C \| u - v_h \|$ où $v_h \in V_h$.

Soit v_h un élément de V_h. Il existe un élément Z_h du supplémentaire topologique de K_0^h [d'après l'hypothèse (B_1^h)] tel que

$$\forall q_h^* \in Y_h^* \quad \langle B'(q_h^*), Z_h \rangle = \langle B'(q_h^*), u - v_h \rangle \leqq \| B' \| \cdot \| q_h^* \| \cdot \| u - v_h \|. \qquad (9)$$

Soit, grâce à l'hypothèse (B_1^h) :

$$\| Z_h \| \leqq \frac{\| B' \|}{\tilde{k}} \| u - v_h \|. \qquad (10)$$

Mais de (9), puisque u est solution de $(\mathscr{I}_2^*)$, on déduit :

$$\forall q_h^* \in Y_h^* \langle B'(q_h^*), Z_h + v_h \rangle = \langle B'(q_h^*), u \rangle = \langle q_h^*, g \rangle$$

et par conséquent $Z_h + v_h$ appartient à K_g^h.

Posons $w_h \doteq Z_h + v_h$; quand v_h décrit V_h, w_h décrit K_g^h et d'après (10) :

$$\| u - w_h \| \leqq \| u - v_h \| + \| Z_h \| \leqq \left(1 + \frac{\| B' \|}{\tilde{k}} \right) \| u - v_h \|. \tag{11}$$

Finalement de (8) et (11) il résulte :

$$\| u - u_h \|^{\alpha - 1} \leqq \mathscr{D} \| u - v_h \| + \mathscr{D}' \| p^* - q_h^* \|. \tag{12}$$

où

$$\mathscr{D} = C(\alpha - 1) \left[\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}} \left(\mathscr{M} + \frac{M_2}{\tilde{k}} \right)^{\alpha - 2} + C(\alpha - 2) \mathscr{M}^{\alpha - 2} + C(\alpha - 2) \left(\frac{M_2}{\tilde{k}} \right)^{\alpha - 2} \right] \left(1 + \frac{\| B' \|}{\tilde{k}} \right)$$

et

$$\mathscr{D}' = C(\alpha - 1) \frac{\| B' \|}{\tilde{\beta}}.$$

C) Estimons $\| p^* - p_h^* \|$. Puisque (u_h, p_h^*) est solution de $(\mathscr{I}_2^*)_h$:

$$\langle B'(p_h^*), v_h \rangle = \langle f, v_h \rangle - \langle A(u_h), v_h \rangle.$$

D'où :

$$\langle B'(p_h^* - q_h^*), v_h \rangle = \langle f, v_h \rangle - \langle A(u_h), v_h \rangle - \langle B'(q_h^*), v \rangle. \tag{13}$$

Mais (u, p^*) étant solution de $(\mathscr{I}_2^*)$:

$$\langle f, v_h \rangle = \langle A(u), v_h \rangle + \langle B'(p^*), v_h \rangle. \tag{14}$$

Donc d'après (13) et (14) :

$$\langle B'(p_h^* - q_h^*), v_h \rangle = \langle A(u) - A(u_h), v_h \rangle + \langle B'(p^* - q_h^*), v_h \rangle.$$

On utilise alors l'hypothèse (A_3^h) et (*cf.* propositions 2.3 et 2.6) :

$$\| u \| \leqq \mathscr{M}, \qquad \| u_h \| \leqq \tilde{\mathscr{M}},$$

$$\langle B'(p_h^* - q_h^*), v_h \rangle \leqq \tilde{\gamma} (\mathscr{M} + \tilde{\mathscr{M}})^{\alpha - 2} \| u - u_h \| \| v_h \| + \| B' \| \cdot \| p^* - q_h^* \| \cdot \| v_h \| \tag{15}$$

Grâce à l'hypothèse (B_1^h), (15) s'écrit enfin :

$$\| p_h^* - q_h^* \| \leqq \frac{1}{k} (\tilde{\gamma} (\mathcal{M} + \tilde{\mathcal{M}})^{\alpha - 2} \| u - u_h \| + \| B' \| . \| p^* - q_h^* \|), \qquad (16)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \| p^* - p_h^* \| &\leqq \| p^* - q_h^* \| + \| p_h^* - q_h^* \| \\ &\leqq \frac{1}{k} (\mathcal{M} + \tilde{\mathcal{M}})^{\alpha - 2} \| u - u_h \| + \left(1 + \frac{\| B' \|}{k} \right) \| p^* - q_h^* \| \end{aligned} \qquad (17)$$

et le résultat annoncé résulte de (12) et (17).

3. EXEMPLES

Dans tout ce qui suit, Ω désignera un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, de frontière régulière $\partial\Omega$. On utilisera les espaces de Sobolev usuels (*cf.* par exemple [9]).

Exemple 1 : Problème avec obstacle.

Considérons le problème :

$$\left.\begin{aligned} A u = - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u \geqq \Psi, \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

On suppose que les coefficients $a_{ij}(x)$ appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et satisfont :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqq \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \qquad \xi_i, \xi_j \in \mathbf{R} - \{0\}, \qquad \nu > 0, \qquad (2)$$

pour presque tout x de Ω.

Introduisons $V = H_0^1(\Omega)$. Soit $\mathcal{C}$ le cône des fonctions positives de $H_0^1(\Omega)$. On suppose que f appartient à $V^* = H^{-1}(\Omega)$ et que ψ appartient à $\mathcal{C}$ (en pratique ψ est donc nul sur $\partial\Omega$).

Le problème (1) peut alors s'écrire :

$$\left.\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in K_\psi = \{ v \in V \mid v \geqq \psi \}, \quad \text{tel que} \\ &\qquad \langle A u, v - u \rangle \geqq \langle f, v - u \rangle, \qquad \forall v \in K_\psi . \end{aligned}\right\} \qquad (\mathcal{S}_1)$$

Vérifions les hypothèses du théorème 1.1; B est ici l'opérateur $-\mathrm{Id}_V$, d'adjoint $B' = -\mathrm{Id}_{V^*}$; l'image par B' de $\mathcal{C}^*$ cône fermé des éléments positifs

de $H^{-1}(\Omega)$ est donc fermé. Enfin on a choisi ψ dans $\mathscr{C}$ et Ker $B' = \{0\}$. Nous en déduisons que le problème :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Trouver } (u, p^*) \in V \times \mathscr{C}^*, \text{ tel que} \\ \langle Au, v\rangle - \langle p^*, v\rangle = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in V, \\ \langle u, q^*\rangle \geqq \langle \psi, q^*\rangle \qquad \forall q^* \in \mathscr{C}^*\end{array}\right\} \qquad (\mathscr{S}_1^*)$$

admet une solution unique [grâce à (2) et Ker $B' = \{0\}$].

Remarque sur l'hypothèse Ψ appartient à $\mathscr{C}$:

Cette hypothèse, nécessaire puisque le cadre abstrait du théorème 1.1 suppose que g appartient à $\mathscr{C}$, peut ne pas être satisfaite en pratique. Ce sera par exemple le cas lorsque :

$$\Psi \leqq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Nous ne pouvons plus alors appliquer le théorème 1.1 ou la proposition 1.1 car le produit de dualité $\langle A(u) - f, v\rangle$ est le produit $(H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega))$ alors que le produit de dualité $\langle \psi, q^*\rangle$ est le produit $(H^1(\Omega)', H^1(\Omega))$.

Par contre si nous supposons (ce qui est un résultat de régularité) que $A(u) - f$ appartient à $L^2(\Omega)$, nous avons :

$$\langle A(u) - f, v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \langle A(u) - f, v\rangle_{L^2(\Omega), L^2(\Omega)},$$

car $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continûment et est dense dans $L^2(\Omega)$.

Nous pouvons alors dualiser la contrainte $u \geqq \psi$ dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire choisir pour $\mathscr{D}$ le cône des fonctions positives de $L^2(\Omega)$. Plus précisément posant $u^* = A(u) - f$, le lagrangien associé à $(\mathscr{S}_1)$ s'écrit :

$$L(v, q^*) = \langle u^*, v\rangle - \langle v - \psi, q^*\rangle,$$

les crochets étant ceux de la dualité $(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$.

Par des raisonnements analogues à ceux faits au chapitre 1, paragraphe 1.1, nous en déduirions alors un résultat partiel plus faible que ceux de la proposition 1.1 et du théorème 1.1, mais suffisant pour obtenir encore une estimation *a priori* analogue à celle de la proposition 2.1.

PROPOSITION 3.1 : *On suppose que $u^* = A(u) - f$ appartient à $L^2(\Omega)$. Soit $\mathscr{D}$ le cône des fonctions positives de $L^2(\Omega)$, $\mathscr{D}^*$ son cône polaire. Alors u est solution de $(\mathscr{S}_1)$ si et seulement si :*

(i) *u^* appartient à $\mathscr{C}$ = cône des fonctions positives de $H_0^1(\Omega)$.*

(ii) *il existe p^* appartenant à $\mathscr{D}^*$ tel que $\langle u^*, u\rangle = \langle p^*, \psi\rangle$.*

Exemple 2 : Éléments finis hybrides (primaux).

Considérons le problème :

$$\left.\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f \\ &\text{où}\quad f\in L^{\alpha'}(\Omega)\qquad \text{avec}\quad \alpha'=\frac{\alpha}{\alpha-1},\ \alpha\geqq 2,\ u|_{\partial\Omega}=0, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathscr{P}_2)$$

qui admet une solution unique. Plus précisément :

$$\exists!\, u\in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$$

tel que

$$\sum_i\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx=\int_\Omega f v\,dx,\qquad \forall v\in W_0^{1,\alpha}(\Omega).$$

Soit $(\Omega_r)_{1\leqslant r\leqslant R}$ une partition de Ω (on peut supposer $\Omega\subset \mathbf{R}^n$ $n=2,3$ dans les cas pratiques).

La méthode hybride consiste à supposer qu'il n'y a pas continuité de v aux interfaces $\partial\Omega_r$. La continuité de $v\in\prod_{r=1}^{R}W^{1,\alpha}(\Omega_r)$ (seulement) aux interfaces apparaît donc comme une *contrainte* pour que $v\in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$, que l'on va *dualiser*. On retrouve ici un point de vue proche de celui de Bensoussan-Lions-Temam [2].

Introduisons :

$V=\prod_{r=1}^{R}W^{1,\alpha}(\Omega_r)$ muni de la norme canonique.

$$H^{\alpha'}(\mathrm{div};\Omega)=\{\vec{q}\in[L^{\alpha'}(\Omega)]^n,\ \mathrm{div}\,\vec{q}\in L^{\alpha'}(\Omega)\}$$

$$Y^*=\left\{\mu\in\prod_{r=1}^{R}W^{-(1/\alpha'),\alpha'}(\partial\Omega_r)\ \middle|\ \exists\,\vec{q}\in H^{\alpha'}(\mathrm{div};\Omega);\ \vec{q}\cdot\vec{n}=\mu \text{ sur } \partial\Omega_r,\ 1\leqq r\leqq R\right\},$$

Y^* apparaît comme l'espace des traces sur $\partial\Omega_r$ des « dérivées normales »

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot n_i\qquad \text{où}\quad u\in W^{1,\alpha}(\Omega),\quad n_i=\cos(\vec{n},x_i).$$

Considérons alors le problème :

$$\left.\begin{aligned} &\text{Trouver } (u, \lambda) \in V \times Y^* \text{ tel que :} \\ &\sum_{r=1}^{R} \int_{\Omega_r} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \sum_{r=1}^{R} \int_{\partial\Omega_r} \lambda v \, d\sigma = \int_{\Omega} f v \, dx, \qquad \forall v \in V \\ &\sum_{r=1}^{R} \int_{\partial\Omega_r} \mu u \, d\sigma = 0, \qquad \forall \mu \in Y^*. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathcal{S}_2^*)$$

(Notons que si $u \in V$, $u|_{\partial\Omega_r} \in W^{1/\alpha', \alpha}(\partial\Omega_r)$ dont le dual est $W^{-1/\alpha', \alpha'}(\partial\Omega_r)$.)

Munissons $H^{\alpha'}(\text{div}; \Omega)$ de la norme :

$$\|\vec{q}\|^{\alpha'}_{H^{\alpha'}(\text{div};\Omega)} = \|\vec{q}\|^{\alpha'}_{L^{\alpha'}(\Omega)} + \|\text{div}\,\vec{q}\|^{\alpha'}_{L^{\alpha'}(\Omega)}$$

et Y^* de la norme :

$$\|\mu\|_{Y^*} = \text{Inf}\left\{ \|\vec{q}\|_{H^{\alpha'}(\text{div};\Omega)} \mid \vec{q} \in H^{\alpha'}(\text{div}; \Omega), \vec{q}.\vec{n} = \mu \text{ sur } \partial\Omega_r \; 1 \leqq r \leqq R \right\}.$$

Les hypothèses du chapitre 2, paragraphe 2, pour l'opérateur A tel que

$$\langle A(u), v \rangle = \sum_{r=1}^{R} \int_{\Omega_r} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

sont clairement satisfaites.

Il reste donc à vérifier que l'opérateur B tel que

$$\langle B'(\lambda), v \rangle = + \sum_{r=1}^{R} \int_{\partial\Omega_r} \lambda v \, d\sigma$$

satisfait l'hypothèse (B_1) de 2.2. En fait, on va montrer que

$$\|B'\lambda\|_{V^*} = \sup_{v \in V} \frac{\langle B'(\lambda), v \rangle}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V} \frac{+ \sum_{r=1}^{R} \int_{\partial\Omega_r} \lambda v \, d\sigma}{\|v\|_V} = \|\lambda\|_{Y^*}.$$

Tout d'abord $\sum_{r=1}^{R} \int_{\partial\Omega_r} \lambda v \, d\sigma \leqq \|\lambda\|_Y . \|v\|_V$, compte tenu de la définition de λ et grâce à la formule de Green. Par conséquent :

$$\|B'\lambda\|_{V^*} = \sup_{v \in V} \frac{\sum_{r=1}^{R} \int_{\partial\Omega_r} \lambda v \, d\sigma}{\|v\|_V} \leqq \sup_{v \in V} \frac{\|\lambda\|_{Y^*} \|v\|_V}{\|v\|_V} = \|\lambda\|_{Y^*}.$$

Pour montrer l'inégalité inverse, nous allons associer à $\lambda \in Y^*$ fixé l'élément $u \in V$ tel que :

$$\left.\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+|u|^{\alpha-2}u=0 \quad \text{dans}\,\Omega_r, \\ \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,.\,n_i=\lambda \quad \text{sur}\ \partial\Omega_r, \end{aligned}\right\} \quad 1 \leqq r \leqq R. \qquad (1)$$

Posons $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ où

$$p_i = \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = |p_i|^{\alpha'-2}p_i.$$

Alors

$$\vec{p} \in \prod_{r=1}^{R} H^{\alpha'}(\operatorname{div};\Omega_r) = \left\{\vec{q} \in L^{\alpha'}_n(\Omega),\ \operatorname{div}\vec{q} \in L^{\alpha'}(\Omega_r)\ 1 \leqq r \leqq R\right\}$$

et vérifie :

$$\left.\begin{aligned} -\operatorname{div}\vec{p}+|u|^{\alpha-2}u=0 \quad \text{dans}\ \Omega_r \quad \Leftrightarrow \quad u=|\operatorname{div}\vec{p}|^{\alpha'-2}\operatorname{div}\vec{p}, \\ \vec{p}\,.\,\vec{n}=\lambda \quad \text{sur}\ \partial\Omega_r, \qquad 1 \leqq r \leqq R. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

On a alors :

$$\sum_{r=1}^{R}\int_{\partial\Omega_r}\lambda u\,d\sigma = \sum_{r=1}^{R}\int_{\partial\Omega_r}\vec{p}\,.\,\vec{n}u\,d\sigma$$

$$= \sum_{r=1}^{R}\int_{\Omega_r}\operatorname{grad}u\,.\,\vec{p}+u\,.\,\operatorname{div}\vec{p}\,dx,$$

$$\sum_{r=1}^{R}\int_{\partial\Omega_r}\lambda u\,d\sigma = \sum_{r=1}^{R}\int_{\Omega_r}|\vec{p}|^{\alpha'}+|\operatorname{div}\vec{p}|^{\alpha'}\,dx = \sum_{r=1}^{R}\|\vec{p}\|^{\alpha'}_{H^{\alpha'}(\operatorname{div};\Omega_r)}. \qquad (3)$$

Mais $\vec{p}$ étant solution de (2) :

$$\|\vec{p}\|_{H^{\alpha'}(\operatorname{div};\Omega_r)} = \operatorname{Inf}\left\{\|\vec{q}\|_{H^{\alpha'}(\operatorname{div};\Omega_r)} \mid \vec{q} \in H^{\alpha'}(\operatorname{div};\Omega_r),\ \vec{q}\,.\,\vec{n}=\lambda \text{ sur } \partial\Omega_r\right\} \qquad (4)$$

qui est une semi-norme sur $W^{-1/\alpha',\alpha'}(\partial\Omega_r)$ notée $|\lambda|_{W^{-1/\alpha',\alpha'}(\partial\Omega_r)}$

Par ailleurs si,

$$\mathscr{C} = \left\{\vec{q} \in H^{\alpha'}(\operatorname{div};\Omega),\ \vec{q}\,.\,\vec{n}=\lambda \text{ sur } \partial\Omega_r,\ 1 \leqq r \leqq R\right\},$$

$$\mathscr{C}_r = \left\{\vec{q} \in H^{\alpha'}(\operatorname{div};\Omega_r),\ \vec{q}\,.\,\vec{n}=\lambda \text{ sur } \partial\Omega_r\right\},$$

on peut vérifier que :

$$\mathcal{B} \simeq \prod_{r=1}^{R} \mathcal{B}_r \text{ algébriquement et topologiquement.}$$

En particulier :

$$\sum_{r=1}^{R} |\lambda|^{\alpha'}_{W^{-1/\alpha',\alpha'}(\partial\Omega_r)} = \|\lambda\|^{\alpha'}_{Y^*}. \tag{5}$$

Il résulte de (3), (4), (5) :

$$\sum_{r=1}^{R} \int_{\partial\Omega_r} \lambda u d\sigma = \|\lambda\|^{\alpha'}_{Y^*}. \tag{6}$$

Soit encore compte tenu du choix de u et $\vec{p}$, et d'après (3) et (6) :

$$\sum_{r=1}^{R} \int_{\partial\Omega_r} \lambda u d\sigma = \|\lambda\|_{Y^*} \|\lambda\|^{\alpha'-1}_{Y^*} = \|\lambda\|_{Y^*} \left(\sum_{r=1}^{R} \|\vec{p}\|^{\alpha'}_{H^{\alpha'}(\mathrm{div},\Omega_r)} \right)^{(\alpha'-1)/\alpha'}$$

$$= \|\lambda\|_{Y^*} \left(\sum_{r=1}^{R} \|u\|^{\alpha}_{W^{1,\alpha}(\Omega_r)} \right)^{1/\alpha} = \|\lambda\|_{Y^*} \|u\|_V .$$

Il en résulte :

$$\|B'\lambda\|_{V^*} = \sup_{v \in V} \frac{\sum_{r=1}^{R} \int \lambda v d\sigma}{\|v\|_V} \geqq \frac{\sum_{r=1}^{R} \lambda u d\sigma}{\|u\|} = \frac{\|\lambda\|_{Y^*} \|u\|_V}{\|u\|_V} = \|\lambda\|_{Y^*}.$$

D'autre part $\mathrm{Ker}\, B = W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ admet un supplémentaire topologique dans $V = \prod_{r=1}^{R} W^{1,\alpha}(\Omega_r)$. En fait il suffit de vérifier que la projection, pour la norme de V, sur $\mathrm{Ker}\, B = W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ est continu. Or si v est un élément de V n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}\, B$, sa projection u_0 sur $\mathrm{Ker}\, B$ est la solution du problème :

$$\operatorname*{Min}_{u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)} \|u - v\|^{\alpha}_V .$$

En effet $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de V Banach réflexif et l'application $v \to \|u - v\|^{\alpha}_V$ est strictement convexe, SCI, coercive. Mais la projection $\mathrm{P} : v \to u_0$ est un opérateur lipschitzien donc continu.

Exemple 3 : Éléments finis mixtes.

Considérons le problème :

$$\left.\begin{aligned} -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f \quad \text{où} \quad f \in L^{\alpha'}(\Omega) (\alpha' \text{ conjugué de } \alpha), \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{$\mathcal{P}_2$}$$

On sait que $(\mathscr{I}_2)$ admet une solution unique. Plus précisément :

$$\exists! u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$$

tel que

$$\sum_i \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f v \, dx, \qquad \forall v \in W_0^{1,\alpha}(\Omega).$$

De plus résoudre $(\mathscr{I}_2)$ équivaut à résoudre le problème d'optimisation :

$$\text{Min} \left\{ \frac{1}{\alpha} \sum_i \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^\alpha dx - \int_\Omega f u dx \,\middle|\, u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega) \right\} \tag{$\mathscr{P}$}$$

dont le problème dual (qui admet également une solution unique) est :

$$\text{Sup} \left\{ -\frac{1}{\alpha'} \sum_i \int_\Omega |p_i|^{\alpha'} dx \,\middle|\, \vec{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in L^{\alpha'}_n(\Omega), \operatorname{div} \vec{p} + f = 0 \right\} \tag{$\mathscr{P}^*$}$$

La méthode mixte consiste, dans ce cas, à dualiser la contrainte d'équilibre :

$$\operatorname{div} \vec{p} + f = 0.$$

Autrement dit, nous considérons le lagrangien associé à $(\mathscr{P}^*)$:

$$\mathscr{L}(\vec{p}, u) = \frac{1}{\alpha'} \sum_i \int_\Omega |p_i|^{\alpha'} dx - \int_\Omega u (\operatorname{div} \vec{p} + f) dx$$

dont nous cherchons un point-selle. Celui-ci est caractérisé par les équations d'optimalité suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \sum_i \int_\Omega |p_i|^{\alpha'-2} p_i q_i dx - \int_\Omega u \operatorname{div} \vec{q} dx = 0, \qquad \forall \vec{q} \in V, \\ \int_\Omega v (\operatorname{div} \vec{p} + f) dx = 0, \qquad \forall v \in Y^*, \end{aligned}\right\} \tag{$\mathscr{I}_2^*$}$$

où $V = \{ \vec{p} \in L^{\alpha'}_n(\Omega), \operatorname{div} \vec{p} \in L^{\alpha'}(\Omega) \}$, $Y^* = L^\alpha(\Omega)$.

La condition suivante, *qu'il va falloir vérifier*, est cruciale pour l'existence et l'unicité de la 2e composante u du point-selle de $\mathscr{L}(\vec{p}, u)$, donc pour l'existence d'une solution $(\vec{p}, u)$ de $(\mathscr{I}_2^*)$, elle correspond à l'hypothèse (B_1) de 2.2 : il existe $k > 0$ tel que

$$\sup_{\vec{q} \in V} \frac{-\int_\Omega v . \operatorname{div} \vec{q} dx}{\| \vec{q} \|_V} \geqq k \| v \|_{L^\alpha(\Omega)}. \tag{1}$$

Vérification de (1)

La vérification consiste à définir un élément particulier $\vec{p}$ de V tel que

$$\frac{-\int_\Omega v \operatorname{div} \vec{p}\, dx}{\|\vec{p}\|_V} = k \|v\|_{L^\alpha(\Omega)}.$$

On aura alors :

$$\sup_{\vec{q} \in V} \frac{-\int_\Omega v \operatorname{div} \vec{q}\, dx}{\|\vec{q}\|_V} \geqq \frac{-\int_\Omega v \operatorname{div} \vec{p}\, dx}{\|\vec{p}\|_V} = k \|v\|_{L^\alpha(\Omega)}.$$

Pour cela, soit v un élément quelconque de $L^\alpha(\Omega)$ et considérons le problème auxiliaire :

$$\left.\begin{aligned} -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^{\alpha-2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) &= |v|^{\alpha-2} v, \\ w|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Si $v \in L^\alpha(\Omega)$, $|v|^{\alpha-2} v \in L^{\alpha'}(\Omega)$ et le problème admet une solution unique w. L'élément $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ tel que

$$p_i = \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^{\alpha-2} \frac{\partial w}{\partial x_i}, \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

va répondre à la question. En effet, il est clair que

$$-\int_\Omega v \operatorname{div} \vec{p}\, dx = \int_\Omega v(-\operatorname{div} \vec{p})\, dx = \int_\Omega v.(|v|^{\alpha-2} v)\, dx = \int_\Omega |v|^\alpha dx = \|v\|^\alpha_{L^\alpha(\Omega)}.$$

De plus, toujours d'après le choix de $\vec{p}$:

$$\|\vec{p}\|^{\alpha'}_V = \|\vec{p}\|^{\alpha'}_{L^{\alpha'}_n(\Omega)} + \|\operatorname{div} \vec{p}\|^{\alpha'}_{L^{\alpha'}(\Omega)} = \int_\Omega |\operatorname{grad} w|^\alpha dx + \int_\Omega |v|^\alpha dx. \tag{3}$$

Or la solution w de (2) vérifie :

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} w|^\alpha dx \leqq \left(\int_\Omega |v|^\alpha dx \right)^{(\alpha-1)/\alpha} \left(\int_\Omega |w|^\alpha dx \right)^{1/\alpha},$$

soit d'après l'inégalité de Poincaré :

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} w|^\alpha dx \leqq C(\Omega) \left(\int_\Omega |v|^\alpha dx \right)^{(\alpha-1)/\alpha} \left(\int_\Omega |\operatorname{grad} w|^\alpha dx \right)^{1/\alpha},$$

soit encore :

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} w|^\alpha \, dx \leqq C(\Omega) \int_\Omega |v|^\alpha \, dx. \tag{4}$$

De (2), (3), (4) il résulte donc :

soit :

$$\|\vec{p}\|_V \leqq \operatorname{Max}(1, C(\Omega))^{1/\alpha'} \left(\int_\Omega |v|^\alpha \, dx \right)^{1/\alpha'} = \operatorname{Max}(1, C(\Omega))^{1/\alpha'} \|v\|_{L^\alpha(\Omega)}^{\alpha-1}.$$

Finalement :

$$\frac{-\int_\Omega v \operatorname{div} \vec{p} \, dx}{\|\vec{p}\|_V} \geqq \frac{\|v\|_{L^\alpha(\Omega)}^\alpha}{\operatorname{Max}(1, C(\Omega))^{1/\alpha'} \|v\|_{L^\alpha(\Omega)}^{\alpha-1}} = \frac{1}{\operatorname{Max}(1, C(\Omega))^{1/\alpha'}} \|v\|_{L^\alpha(\Omega)},$$

d'où le résultat en posant

$$k = \frac{1}{\operatorname{Max}(1, C(\Omega))^{1/\alpha'}}.$$

Remarque : L'intervention de l'application de dualité $v \to |v|^{\alpha-2} v$ de $L^\alpha(\Omega)$ relative à $\Phi(r) = r^{\alpha-1}$ est indispensable et nullement fortuite.

Il reste à vérifier, pour appliquer le théorème 2 que

$$\operatorname{Ker} B = \{ \vec{p} \in V \mid \operatorname{div} \vec{p} = 0 \} = \{ \vec{p} \in L_n^{\alpha'}(\Omega), \operatorname{div} \vec{p} = 0 \} \tag{2}$$

admet un supplémentaire topologique.

Pour cela remarquons que l'orthogonal de Ker B s'écrit (*cf.* Pelissier [10]) :

$$(\operatorname{Ker} B)^\perp = \{ \vec{p} \in L_n^{\alpha'}(\Omega), \vec{p} = \operatorname{grad} u \text{ où } u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega) \}.$$

Introduisons alors l'application de dualité J de $L_n^\alpha(\Omega)$:

$$J(\vec{p}^*) = \vec{p} \qquad \text{avec} \quad p_i = |p_i^*|^{\alpha-2} p_i^*, \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

et considérons l'image M par J de $(\operatorname{Ker} B)^\perp$:

$$M = \left\{ \vec{p} \in L_n^{\alpha'}(\Omega), p_i = \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, 1 \leqq i \leqq n \text{ où } u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega) \right\}.$$

Il est clair que M est un sous-espace fermé de V et que :

$$M \cap N = \{0\} \quad M + N \subset V \text{ en notant } N = \operatorname{Ker} B.$$

Montrons que $V \subset M+N$.

Soit $\vec{p} \in V$. Définissons $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ élément de M par :

$$m_i = \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

où u est la solution du problème :

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = -\operatorname{div} \vec{p},$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Par construction $\vec{m} \in M$. Définissons alors :

$$\vec{n} = \vec{p} - \vec{m}.$$

Alors $\vec{n} \in L_n^{\alpha'}(\Omega)$ et $\operatorname{div} \vec{n} = \operatorname{div}(\vec{p} - \vec{m}) = \operatorname{div} \vec{p} - \operatorname{div} \vec{m} = 0$, d'après le choix de $\vec{m}$. Donc $\vec{n} \in N$.

Tout élément $\vec{p}$ de V s'écrit donc de manière unique :

$$\vec{p} = \vec{m} + \vec{n} \qquad \text{où} \quad \vec{m} \in M, \ \vec{n} \in N,$$

M et N étant des sous-espaces fermés de V.

L'opérateur $\mathbf{P} : V \to N$ tel que $\mathbf{P}(\vec{p}) = \vec{n}$ vérifie alors $\mathbf{P} \circ \mathbf{P} = \mathbf{P}$ et puisque $\| \vec{n} - \vec{p} \| = \operatorname{Inf}_{\vec{q} \in N} \| \vec{q} - \vec{p} \|$, $\mathbf{P}$ est un opérateur lipschitzien donc continu. Nous avons donc défini un opérateur de projection sur N parallèlement à M qui est continu, ce qui équivaut à dire (*cf.* note (6), p. 379) que le supplémentaire algébrique de N est aussi *topologique*.

En résumé l'hypothèse (B_1) de 2.2 est vérifiée. On peut montrer facilement que l'opérateur $A(\vec{p}) = (|p_i|^{\alpha'-2} p_i)_{1 \leq i \leq n}$ satisfont les hypothèses (A_1), (A_2), (A_3). Il y a donc existence et unicité de la solution $(\vec{p}, u)$ du problème $(\mathcal{S}_2^*)$; on peut appliquer la théorie de 2.2, notamment les propositions 2.2, 2.3 et 2.4.

Exemple 4 : problème de Stokes.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ ($n = 2$ ou 3).

Considérons le problème.

Trouver $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ et p tels que

$$\begin{cases} -\nu \Delta \vec{u} + \operatorname{grad} p = \vec{f} \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0, \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Posons :

$$K_0 = \{\vec{u} \in [H_0^1(\Omega)]^n, \ \mathrm{div}\,\vec{u} = 0\}, \qquad V = [H_0^1(\Omega)]^n, \qquad Y = L^2(\Omega)/\mathbf{R},$$

$$A(\vec{u}) = -\nu\Delta\vec{u}, \qquad B(\vec{u}) = -\mathrm{div}\,\vec{u}.$$

Nous allons dualiser la contrainte div $\vec{u} = 0$, le multiplicateur étant ici la pression p. Pour cela nous considérons le problème :

Trouver $(\vec{u}, p) \in V \times Y^*$ *tel que*,

$$\left.\begin{aligned} \langle A(\vec{u}), \vec{v}\rangle + \langle p, B(\vec{v})\rangle &= \langle \vec{f}, \vec{v}\rangle, \qquad \forall \vec{v} \in V, \\ \langle q, B(\vec{u})\rangle &= 0, \qquad \forall q \in Y; \end{aligned}\right\} \qquad (\mathscr{I}_2^*)$$

ou encore :

Trouver $(\vec{u}, p) \in V \times Y^*$ *tel que*,

$$\left.\begin{aligned} \nu \sum_{ij} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx - \int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,dx &= \int_\Omega \vec{f}.\vec{v}\,dx, \qquad \forall \vec{v} \in V, \\ \int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\vec{u}\,dx &= 0, \qquad \forall q \in Y. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathscr{I}_2^*)$$

L'opérateur A est linéaire continu : les hypothèses du paragraphe 2 sont clairement vérifiées. Par ailleurs K_0, étant un sous-espace fermé de V espace de Hilbert, admet un supplémentaire topologique à savoir $K_0^{\perp}$. Enfin il reste à vérifier que $\| B' p \| \geqq k \| p \|$ c'est-à-dire :

$$\| \mathrm{grad}\, p \|_{[H^{-1}(\Omega)]^n} \geqq k \| p \|_{L^2(\Omega)/\mathbf{R}}.$$

Or cela résulte de Temam [13] avec $k = C(\Omega)$.

Le problème $(\mathscr{I}_2^*)$ admet donc une solution unique. La théorie du chapitre 2, paragraphe 2 s'applique et $(\mathscr{I}_2^*)$ équivaut au problème :

Trouver $\vec{u} \in K_0$ *tel que*,

$$\left.\begin{aligned} \nu \sum_{ij} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx = \int_\Omega \vec{f}.\vec{v}\,dx, \qquad \forall \vec{v} \in K_0. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathscr{I}_2)$$

Remarque : $p \in L^2(\Omega)/\mathbf{R}$; p n'est donc défini qu'à une constante près : il n'y a pas unicité de p dans $L^2(\Omega)$.

Au cours de la frappe de ce manuscrit est paru le travail de M. Bercovier (Thèse, Jérusalem, 1976). Des problèmes analogues aux nôtres y sont traités, par une méthode différente, avec en vue l'étude de l'équation de Navier-Stokes.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. P. AUBIN, *Cours d'optimisation*, Cahiers mathématiques de la décision, Université, Paris-IX, 1972,
Approximation of Elliptic Boundary Value Problems, Wiley, Interscience, 1972.
2. A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS et R. TEMAM, *Sur les méthodes de décomposition, de coordination, de décentralisations et applications IRIA*, Cahier n° 11, t. 2, 1972.
3. F. BREZZI, *Approximation of Saddle Points*, R.A.I.R.O., 2, 1974, p. 129-151.
4. F. BREZZI et G. SACCHI, *A Finite Element Approximation of a Variational Inequality Related to Hydraulics* (à paraitre).
5. I. EKELAND et R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod-Bordas, Paris, 1974. English translation : North Holland, Amsterdam, 1975.
6. R. S. FALK, *Error Estimates for the Approximation of a Class of Variational Inequalities*, Math. of Comp., vol. 28, 1974, p. 963-971.
7. R. GLOWINSKI et A. MARROCO, *Sur l'approximation par éléments finis d'ordre 1 et la résolution par pénalisation dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires*, R.A.I.R.O., vol. 2, 1975, p. 41-76.
8. T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer Verlag, Heidelberg-New York, 1966.
9. J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
10. M. C. PELISSIER, *Sur quelques problèmes non linéaires en glaciologie*, Thèse, Université Paris-Sud, 1975.
11. P. A. RAVIART et J. M. THOMAS, *Primal Hybrid Finite Element Methods for 2nd Order Elliptic Equations* (à paraitre).
12. P. A. RAVIART et J. M. THOMAS, *A Mixed Finite Element Method for 2nd Order Elliptic Problems*, (à paraitre).
13. R. TEMAM, *Navier Stokes Equations*, North Holland, Amsterdam (à paraitre en 1976).
14. F. TREVES, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 1970.
15. K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer Verlag, Heidelberg-New York, 1966.

COMM. IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, 3(10), 907-931 (1978)

REMARKS ON A NON LINEAR EQUATION ARISING IN POPULATION GENETICS

J.C. SAUT

U.E.R. de Mathématiques
Université Paris VII
75221 PARIS CEDEX 05

B. SCHEURER

Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques Appliquées
91128 PALAISEAU CEDEX
et
54, rue Madame - 75006 PARIS

I - INTRODUCTION AND NOTATIONS.

Let Ω be a bounded open set of class C^2 of $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega = \Gamma$.

In this paper, we look for non trivial solutions of the equations :

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \Delta u + \lambda F(x,u) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega\ , \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0\ . \end{cases}$$

Here, n is the unit exterior normal on Γ, λ is a non negative real parameter, and $F(.,0) \equiv F(.,1) = 0$. The function F does not verify any sign hypothesis and is not regular in x.

Copyright © 1978 by Marcel Dekker, Inc. All Rights Reserved. Neither this work nor any part may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, microfilming, and recording, or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the publisher

Problems of this kind arise in population genetics (Cf. for instance Slatkin [10]) : u is then the frequence of some population, and we shall only focus our attention on solutions satisfying $0 \leqslant u(x) \leqslant 1$.

Problem (1.1) has been recently studied under very interesting aspects by W.H. Fleming [6], F. Hoppensteadt [12], and Peletier-Fife [5]. These authors give existence and statility results for (1.1) using mainly, for existence, variational [6] or sub and super solutions methods [5]. In [6], Fleming uses stability arguments to get further bifurcation from the trivial branches $u \equiv 0$, $u \equiv 1$. Using contraction mapping theorem, Peletier-Fife [5] give an example of secondary bifurcation occuring from the branch $= 0$. Several proofs are specific of the space dimension 1, and stated for rather special F's.

Our aim in this paper is to explicit completely, for a fairly large class of non-linearities and in any space dimension, the structure of the solution set of (1.1), in the neighborhood of $\lambda = 0$.

More precisely, we investigate secondary bifurcation from the vertical primary bifurcated branch at $\lambda = 0$. For this purpose, we use Lyapunov-Schmidt method. To study the bifurcation equation, we apply differential methods, in particular, the Morse lemma and the k-determination theorem of J. Mather (Cf. [10], [11] and the Appendix). This allow us to count the number of branches of non trivial solutions, under integral conditions on the non-linearity F, and so to complete and generalize some results of [5], [6].

Our method is somewhat related to the paper of Chow, Hale, Mallet-Parret [2] where Malgrange preparation theorem is used. Let us precise that the interest of the method seems to exceed the examples treated here.

The plan is as follows. First we give a criterion of non existence of non trivial solutions of (1.1), lying essentially on the simple eigenvalue bifurcation theorem of Crandall and Rabinowitz [3].

Then we give three results on the structure of the solution set of (1.1) in a neighborhood of $\lambda = 0$, corresponding to increasing degeneracy levels of the bifurcation equation.

Lastly we prove an estimate which seems to be new, on the first positive eigenvalue λ_1 of the linearized problem

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \Delta u + \lambda r(x) u = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

The function r belongs only to $L^\infty(\Omega)$, without any sign hypothesis. This results leads of course to an estimate on the first value λ of bifurcation with respect to the branch $u \equiv 0$, or the branch $u \equiv 1$, for problem (1.1).

For the reader's convenience, the result of Mather used in this work is recalled in an appendix.

We shall denote by $W^{m,p}(\Omega)$ the Sobolev space of $L^p(\Omega)$ functions which derivatives up to the order m are in $L^p(\Omega)$, and $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

For $0 < \alpha < 1$, $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$ is the space of function having bounded derivatives up to the order k, the k^{th} derivatives being Hölder continuous with exponent α.

We then set :

$$S = \{(\lambda,u) \in \mathbb{R}_+ \times H^2(\Omega) \ ; \ (\lambda,u) \text{ satisfies (1.1) and } 0 \leq u(x) \leq 1\}.$$

We make on F the following hypothesis :

(1.3) There exists $K > 0$ such that $\|F(.,\xi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K, \quad \forall \xi \in [0,1]$.

(1.4) For almost every $x \in \Omega$, $F(x,.)$ is C^k, $k \geq 2$.

(1.5) For every $\xi \in [0,1]$, $F_u^{(i)}(.,\xi) \in L^2(\Omega)$, $\quad i = 0,1,2$.

(1.6) $$F(.,0) \equiv F(.,1) \equiv 0.$$

In application to population genetics, one encounters in particular :

Example 1 : $F(x,u) = g(x)f(u)$, $f(0) = f(1) = 0$ (cf [6])

Example 2 : $F(x,u) = f(u)(u-a(x))$, $f(0) = f(1) = 0$ (cf [5]).

Let us remark that in these examples g and a are not necessarily continuous (cf. Slatkin [10]).

By (1.3) and the classical regularity results of linear elliptic equations (Agmon, Douglis, Nirenberg [1]), if $(\lambda,u) \in S$, then $u \in W^{2,p}(\Omega)$ for every p, $1 < p < \infty$, and therefore $u \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ for some α, $0 < \alpha < 1$, by Sobolev imbedding theorem.

II - We first give a result on non existence of non trivial solutions of (1.1) in the neighborhood of $\lambda = 0$.

Theorem 1

Let us suppose that F satisfies (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) and the two following conditions :

(2.1) $$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial u}(x,\varepsilon)\,dx \neq 0 , \qquad \varepsilon = 0,1$$

(2.2) $$\int_\Omega F(x,c)\,dx \neq 0 , \qquad \forall\, c \in]0,1[.$$

Then there exists $\lambda_0 > 0$ such that $(\lambda,u) \in S$ with $0 < \lambda < \lambda_0$ implies $u \equiv 0$ or $u \equiv 1$. ∎

Remark 1

In example 1, condition (2.1), (2.2) are equivalent to $\int_\Omega g(x)\,dx \neq 0$ and $\frac{\partial f}{\partial u}(\varepsilon) \neq 0$, $\varepsilon = 0,1$.

In example 2, where $f(u) = u(1-u)$ (cf Poletier-Fife [5]), conditions (2.1) and (2.2) are equivalent to $\int_\Omega (c-a(x))\,dx \neq 0$, $\forall\, c \in [0,1]$. ∎

Proof of Theorem 1 :

The hypothesis (2.1) insures that the transversality condition in the simple eigenvalue bifurcation theorem of Crandall, Rabinowitz ([3] p. 325) is satisfied at $\lambda = 0$. Consequently, S consists only in the branches ($\lambda = 0$, and $u \equiv 0$)', ($\lambda = 0$, and $u \equiv 1$) in the neighborhood of (0,0) and (0,1).

(i) We show now that for every $c \in]0,1[$, there exists in $\mathbb{R}_+ \times H^2(\Omega)$ a ball $B = B((0,c)\ ;\ \varepsilon_c)$, $\varepsilon_c > 0$, such that $S \cap B = B \cap [\{0\} \times [0,1]]$.

If it was not the case, there will exist $c \in]0,1[$ and a sequence $(\lambda_n, u_n) \in S$ such that $\lambda_n \neq 0$ for every n, and $\lambda_n \to 0$, $u_n \to c$ in $H^2(\Omega)$. So there will exist a subsequence $u_n \to c$ a.e. But equation (1.1) (and $\lambda_n \neq 0$) imply $\int_\Omega F(x,u_n)\,dx = 0$, and by (1.3) and Lebesgue theorem, $\int_\Omega F(x,c)\,dx = 0$, which violates condition (2.2).

(ii) Let us suppose now the conclusion of the theorem to be false. Then, there will exist a sequence $(\lambda_n, u_n) \in S$, $\lambda_n \neq 0$, $\lambda_n \to 0$, $u_n \not\equiv 0$, $u_n \not\equiv 1$ for every n. One deduces by equation (1.1) that u_n is a bounded sequence in $H^2(\Omega)$ for instance, and one can extract a subsequence, which we also denote u_n, such that $u_n \to u$ strongly in $H^1(\Omega)$, and we get at the limit :

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 \quad ,$$

i.e. $u = c \in]0,1[$, which contradicts point (i). ∎

Remark 2

A similar result hold for solutions not necessarily lying between 0 and 1 ; one has then to impose a growth condition in u to F. ∎

III - In the case where (2.2) is not satisfied, there can exist one or several non trivial branches of solutions, bifurcating from the trivial curve $\lambda = 0$ at a point $(0,c)$, $c \in]0,1[$.

In the sequel, we shall therefore suppose that F satisfies :

(3.1) There exists $c \in]0,1[$ such that $\int_\Omega F(x,c)\, dx = 0$.

Remark 3

In example 1, if one suppose that f has no zeroes in $]0,1[$, condition (3.1) is equivalent to $\int_\Omega g(x)\, dx = 0$.

Similarly, in example 2, where $f(u) = u(1-u)$, condition (3.1) is equivalent to $\int_\Omega a(x)\, dx = c|\Omega|$ (a condition given in the one dimensional case by Peletier and Fife [5]). ∎

We introduce now some notations :

We denote by A the unbounded operator in $L^2(\Omega)$ defined by :

$$D(A) = \{u \in L^2(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \ ^{(1)}\}\ , \qquad Au = \Delta u.$$

One can of course decompose D(A) and $L^2(\Omega)$ as follows :

$D(A) = \text{Ker } A \oplus X_2$, $L^2(\Omega) = Y_1 \oplus R(A)$, with

Ker A = $\mathbb{R}$, dim $Y_1 = 1$. We then denote Q the orthogonal projection on R(A) associated to this decomposition ($Qu = u - \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} u\,dx$).

We introduce now the elements γ_i of X_2 defined by :

$$(3.2) \qquad \begin{cases} \Delta \gamma_i = -QF_u^{(i)}(.,c) & i = 0,1,2 \\ \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

Note that this definition makes senses by (1.5).

The following three theorems describe completely the structure of S in the neighborhood of (0,c), by examining the successive degeneracy cases of the bifurcation equation.

In what follows, we shall suppose, for technical reason, that $n \leq 3$.

Theorem 2

We suppose that F *verifies (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) and (3.1).*

(i) If $\int_{\Omega} F'_u(x,c)\,dx \neq 0$, *there exists a neighborhood* V *of* (0,c) *in* $\mathbb{R}_+ \times H^2(\Omega)$ *such that*

$$(S \cap V) \setminus \{\{0\} \times [0,1]\} \cap V \text{ is a } C^k\text{-curve.}$$

(1) In the usual sense of traces, cf. Lions-Magenes [7].

(ii) If $\int_\Omega F'_u(x,c)\,dx = 0$, $\int_\Omega F'_u(x,c)\,\gamma_0(x)\,dx \neq 0$ *and*

(3.3) $\alpha \to \int_\Omega F(x,\alpha)\,dx$ *is not identically zero in the neighborhood of* $\alpha = c$ (1), *then the same conclusion as in (i) holds.*

Theorem 3

Let us suppose that F verifies (1.3), (1.4) (with $k \geq 3$*), (1.5), (1.6), (3.1). Suppose moreover that :*

(3.4) $\int_\Omega F'_u(x,c)\,dx = \int_\Omega F'_u(x,c)\,\gamma_0(x)\,dx = 0$

(3.5) $\int_\Omega [F'_u(x,c)\,\gamma_1(x) + F''_u(x,c)\,\gamma_0(x)]\,dx \neq 0.$

and

(3.6) $\int_\Omega F''_u(x,c)\,dx = 0.$ (2).

Then there exists a neighborhood V of $(0,c)$ *in* $\mathbb{R}_+ \times H^2(\Omega)$ *such that* $S \cap V$ *consists in* $[\{0\} \times [0,1]] \cap V$ *and in two* C^{k-2}*-curves intersecting transversaly at* $(0,c)$. *One of these curves is always non trivial ; the other one is non trivial if and only if (3.3) holds.*

Theorem 4

Let us suppose that F satisfies (1.3), (1.4) (with $k = \infty$*), (1.5), (1.6) and (3.1).*

Suppose moreover that

(3.7) $\int_\Omega F'_u(x,c)\,dx = \int_\Omega F''_u(x,c)\,dx =$

$\int_\Omega [F'_u(x,c)\,\gamma_1(x) + F''_u(x,c)\,\gamma_0(x)]\,dx = 0.$

and

---

(1) This hypothesis is to insure that the curve is not trivial.
(2) This hypothesis is only used to simplify the statement of the theorem.

(3.8) $\int_\Omega F'''_u(x,c)\,dx = 0.$

Then there exists a neighborhood V of (0,c) in $\mathbb{R}_+ \times H^2(\Omega)$, *such that* $S \cap V$ *consists in :*

(i) Either $(\{0\} \times [0,1]) \cap V$

(ii) or $(\{0\} \times [0,1]) \cap V$ *and two non trivial* C^∞*-curves intersecting transversally at (0,c).*

The alternative depends on an hypothesis to be explicited in the proof of the theorem.

Proof of theorem 2, 3 and 4

The principle of the proof is the following : we apply the Lyapounov-Schmidt method, then we examine the successive degeneracy cases of the bifurcation equation.

The idea is to reduce the study of the bifurcation equation to the study of its Taylor polynomial at some order. To do this, one use implicit functions theorem, then Morse Lemma, and a 3-determination theorem for the jet of a certain application.

1) - Lyapounov-Schmidt method :

Equation (1) is, in the neighborhood of (0.c), equivalent to :

(3.9) $\Delta u_2 + \lambda QF(.,\alpha + u_2) = 0$

(3.10) $\lambda(I-Q)\,F(.,\alpha + u_2) = 0$

where Q is the orthogonal projection on R(A) and $u = \alpha + u_2 \in \operatorname{Ker} A \oplus X_2$.

By implicit functions theorem, one can express u_2 as a function of α and λ, in a neighborhood of $\lambda = 0$, $\alpha = c$, $u_2 = 0$.

In fact, if one defines $A : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times X_2 \to R(A)$ by $A(\lambda, \alpha, u_2) = \Delta u_2 + \lambda QF(., \alpha + u_2)$, one sees that $D_{u_2} A(0,c,0) = \Delta$, and is therefore an isomorphism.

The resolution of (1.1) in the neighborhood of $\lambda = 0$, $u = c$ is then equivalent to that of :

$$\Phi(\alpha, \lambda) = \lambda(I-Q)\, F(., \alpha + u_2(\alpha, \lambda)) = 0 \tag{3.11}$$

in the neighborhood of $\lambda = 0$, $\alpha = c$. Since we are only interested in non trivial solutions (i.e. $\lambda \neq 0$), one considers in fact the equation :

$$\psi(\alpha, \lambda) = (I-Q)\, F(., \alpha + u_2(\alpha, \lambda)) = 0 \tag{3.12}$$

where ψ is a C^k-real function of two real variables.

Let us remark that :

$$\psi(c,0) = (I-Q)F(.,c + u_2(c,0)) = (I-Q)\, F(.,c) = 0 \tag{3.13}$$

by (3.1) and recalling that $(I-Q)v = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v\, dx$.

2) - Study of (3.12)

To study $\psi^{-1}(0)$ in the neighborhood of $\alpha = c$, $\lambda = 0$, we reduce, following Nirenberg [8] (cf also [2]), by a suitable diffeomorphism, to the local study of the zero set of a polynomial.

This is equivalent to say that ψ is determined in the neighborhood of $(c,0)$ by its Taylor polynomial at some order.

A) Order 1 degeneracy (Proof of theorem 2)

One has $$\frac{\partial \psi}{\partial x}(\alpha, \lambda) = (I-Q)\, F'_u(., \alpha + u_2) \left[1 + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha}(\alpha, \lambda) \right]$$

and $$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(\alpha, \lambda) = (I-Q)\, F'_u(., \alpha + u_2) \frac{\partial u_2}{\partial \lambda}(\alpha, \lambda).$$

On the other hand, by using (3.9), one finds, denoting

by K the inverse of $\lambda_1 X_2$:

$$\frac{\partial u_2}{\partial \alpha}(\alpha, \lambda) = -\lambda KQF'_u(.,u)\left[\frac{\partial u_2}{\partial \alpha}(\alpha, \lambda) + 1\right]$$

and $$\frac{\partial u_2}{\partial \alpha}(\alpha, \lambda) = -KQF(.,u) - KQF'_u(.,u)\frac{\partial u_2}{\partial \lambda}(\alpha, \lambda)$$

hence

(3.14) $$\frac{\partial u_2}{\partial \alpha}(c,0) = 0 \text{ and } \frac{\partial u_2}{\partial \lambda}(c,0) = -KQF(.,c).$$

Finally, we get :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(c,0) = (I-Q)F'_u(.,c) = \int_\Omega F'_u(x,c)\,dx.$$

and $$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(c,0) = -(I-Q)\left[F'_u(.,c)\,KQF(.,c)\right]$$
$$= \int_\Omega F'_u(x,c)\,\gamma_0(x)\,dx.$$

If $\int_\Omega F'_u(x,c)dx \neq 0$, there exists in the neighborhood of $(c,0)$ a unique C^k-curve $(\alpha(\lambda),\lambda)$, $|\lambda| < \varepsilon$, such that $\Psi(\alpha(\lambda),\lambda) = 0$, and we get the existence of a non trivial branch of solutions of (1) in a neighhorbood of $u = c$, $\lambda = 0$.

If $\int_\Omega F'_u(x,c)\,dx = 0$ and $\int_\Omega F'_u(x,c)\,\gamma_0(x)\,dx \neq 0$, again by implicit functions theorem, there exists in a neighborhood of $\alpha = c$, $\lambda = 0$ a unique curve $(\alpha, \lambda(\alpha))$, $|\alpha - c| < \varepsilon$ such that $\psi(\alpha, \lambda(\alpha)) = 0$.

This curve will be non trivial if and only if :

$\psi(\alpha,0) \neq 0$ for $0 < |\alpha - c| < \varepsilon$, i.e. if and only if

(3.15) $$\alpha \to \int_\Omega F(x, \alpha + u_2(\alpha, 0))\,dx \not\equiv 0 \text{ for } 0 < |\alpha - c| < \varepsilon.$$

Hence, by (3.9), if and only if (3.3) holds.

Theorem 2 follows now readily, noting that a non trivial

solution $u_2(\alpha, \lambda)$ of (3.11) corresponds bijectively to a non trivial solution $(u(\alpha, u_2(\alpha, \lambda)), \lambda)$ of (1.1).

One has clearly $\|u - c\|_{H^2(\Omega)} \leq \varepsilon(\lambda)$ where $\varepsilon(\lambda) \to 0$ with λ. For $m \leq 3$, one has the injection $H^2(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ and so $\|u - c\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \varepsilon'(\cdot)$, where $\varepsilon'(\lambda) \to 0$ with λ, proving that $0 \leq u(\alpha, u_2(\alpha,\lambda)) \leq 1$ for λ small enough, and then that $u \in S$ for λ small enough.

B) Order 2 degeneracy (Proof of theorem 3)

One easily computes by using (3.14) and by (3.12) :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2}(c,0) = (I-Q)\left[F''_u(\cdot,c) + F'_u(\cdot,c)\frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2}(c,0)\right]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2}(c,0) = (I-Q)\left[F'_u(\cdot,c)\frac{\partial^2 u_2}{\partial \lambda^2}(c,0) + F'_u(\cdot,c)\gamma_0^2\right]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \lambda}(c,0) = (I-Q)\left[F''_u(\cdot,c)\,\gamma_0 + F'_u(\cdot,c)\frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \lambda}(c,0)\right].$$

By using (3.9) one finds :

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2}(c,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial \lambda^2}(c,0) = 2KQF'(\cdot,c)\,\gamma_0$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \lambda}(c,0) = -KQF'_u(\cdot,c) = \gamma_1$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2}(c,0) = (I-Q)\,F''_u(\cdot,c) = \int_\Omega F''_u(x,c)\,dx$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2}(x,0) = (I-Q)\left[2F'_u(\cdot,c)\,KQF'_u(\cdot,c)\,\gamma_0 + F''_u(\cdot,c)\,\gamma_0^2\right]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \lambda}(x,0) = I-Q)\;F''_u(\cdot,c)\,\gamma_0 + F''_u(\cdot,c)\,\gamma_1$$

$$= \int_\Omega \left[F''_u(x,c)\,\gamma_0(x) + F'_u(x,c)\,\gamma_1(x)\right]\,dx.$$

Let G_C be the unique element in X_2 defined by :

$$\begin{cases} \Delta G_C = - QF'_u(.,c)\, v_C \\ \dfrac{\partial G_C}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

One can then write :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2}(c,0) = 2\int_\Omega F'_u(x,c)\, G_C(x)\, dx + \int_\Omega F''_u(x,c)\, v_C^2(x)\, dx$$

Suppose $\int_\Omega F''_u(x,c)\, dx = 0$. Then :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2}(c,0)\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2}(c,0) - \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \lambda}(c,0)\right]^2 = -\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \lambda}(c,0)\right]^2$$

If $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \lambda}(c,0) \neq 0$ (which by the above computation is exactly condition (3.5)), the Hessian of Ψ at $(c,0)$ is non degenerate and indefinite.

By Morse Lemma (see for instance Nirenberg [8]), $\Psi^{-1}(0)$ consists in a neighborhood of $\alpha = 0$, $\lambda = 0$, in two C^{k-2}-curves intersecting transversaly.

At least one of these curves is therefore non trivial. By (3.15) the other one will be non trivial if and only if (3.3) holds.

Theorem 3 follows now readily, by the same argument as in case A).

If $\int_\Omega F''_u(x,c)\, dx \neq 0$, the condition for the critical point $(c,0)$ to be non degenerate is less easy to exprime in function of F. We let to the reader the care of stating the corresponding theorem.

C) Order 3 degeneracy (Proof of theorem 4)

We suppose always by technical reasons, that :

$$\int_\Omega F_u^{(i)}(x,c)\,dx = 0, \qquad i = 1,2$$

and moreover

$$(3.16)\qquad \int_\Omega F'_u(x,c)\,\gamma_1(x)\,dx + \int_\Omega F'_u(x,c)\,\gamma_0(x)\,dx = 0.$$

One easily computes :

$$\frac{\partial^3\Psi}{\partial\alpha^3}(c,0) = \int_\Omega F'''_u(x,c)\,dx$$

$$A = \frac{\partial^3\Psi}{\partial\alpha^2\partial\lambda}(c,0) = \int_\Omega F'_u(x,c)\,\gamma_2(x)\,dx + 2\int_\Omega F''_u(x,c)\,\gamma_1(x)\,dx + \int_\Omega F'''_u(x,c)\,\gamma_0(x)\,dx .$$

$$B = \frac{\partial^3\Psi}{\mu\alpha\partial\lambda^2}(c,0) = \int_\Omega F'_u(x,c)\,\frac{\partial^3 u_2}{\partial\alpha\partial\lambda^2}(c,0)\,dx + 2\int_\Omega F''_u(x,c)\,\gamma_1(x)\,\gamma_0(x)\,dx + 2\int_\Omega F''_u(x,c)\,G_0(x)\,dx + 2\int_\Omega F'''_u(x,c)\,G_0(x)\,dx.$$

$$C = \frac{\partial^3\Psi}{\partial\lambda^3}(c,0) = \int_\Omega F'_u(x,c)\,\frac{\partial^3 u_2}{\partial\lambda^3}(c,0)\,dx + 6\int_\Omega F''_u(x,c)\,G_0(x)[1+\gamma_0(x)]\,dx + \int_\Omega F'''_u(x,c)\,\gamma_0^3(x)\,dx.$$

On the other hand

$$\frac{\partial^3 u_2}{\partial\alpha\partial\lambda^2}(c,0) = -2KQF'_u(\cdot,c)\,\gamma_1 - 2KQF''_u(\cdot,c)\,\gamma_0^2 \quad \text{and}$$

$$\frac{\partial^3 u_2}{\partial\lambda^3}(c,0) = -6KQF'_u(\cdot,c)\,G_0 - 3KQF''_u(\cdot,c)\,\lambda_0^2 .$$

Supposing that

$$(3.17)\qquad \int_\Omega F'''_u(x,c)\,dx = 0,$$

the third order Taylor expansion of Ψ in the neighborhood of

(c,0) writes :

$$\Psi(\alpha,\lambda) = \lambda[A(\alpha-c)^2 + B(\alpha-c)\ \lambda + C\lambda^2] + 0(|\alpha - c|^3\ ,\ |\lambda|^3).$$

One wishes that the third order Taylor polynomial of Ψ (i.e. the 3-jet of Ψ) determines, up to a diffeomorphism, the structure of $\Psi^{-1}(0)$ in a neighborhood of (c,0) ; that is to say, following the termonology used in the Thom-Mather theory (cf. for instance Zeeman's lecture in [11] p. 263), one looks for conditions under which Ψ is 3-determined in a neighborhood of (c,0).

One knows (cf Zeeman [11], or the appendix), that this will be the case if the cubic constituted by the 3-jet of Ψ is either an elliptic umbilic, or a hyperbolic umbilic. Setting $d = B^2 - 4AC$, the elliptic umbilic corresponds to the case $d > 0$, and the hyperbolic umbilic corresponds to the case $d < 0$. The case where $d = 0$ corresponds to the parabolic umbilic $\eta = x^2y$ which is not 3-determined (it would be necessary then to examine the 4^{th} derivatives).

To sum up, $\Psi^{-1}(0)$ is, in a neighborhood of (c,0), C^∞-diffeomorphic to the set Σ of the solutions closed to (c,0) of the equation :

$$\lambda\ [A(\alpha-c)^2 + B(\alpha-c)\ \lambda + C\lambda^2] = 0$$

The axis $\lambda = 0$ is evidently included in Σ. Moreover :

if $d > 0$, $\Sigma = \{(\alpha,\lambda),\ \lambda = 0\}$.

if $d < 0$, Σ contains besides two C^∞-curves intersecting transversaly at (c,0).

One achieves the proof as in A) or B) case. ∎

Remark 4

One can evidently treat by the same methods similar equations with a non linear dependance in λ (such an equation is given in the appendix of [10]).

More generally, the same methods apply to bifurcation problems of the type :

(3.18) $G(u,\lambda) = 0$, $u \in$ Banach space X, $\lambda \in \mathbb{R}^d$,

where for each λ, the mapping $u \to G(u,\lambda)$ is non linear Fredholm of index 0. To be precise, one can study by the above methods the local structure of the solution set of (3.18) in the neighborhood of a solution (u_0, λ_0) such that $\text{Ker } G'_u(u_0, \lambda_0) = 1$.

IV - We shall finish by a negative result concerning bifurcation from the trivial branches $u \equiv 0$, $u \equiv 1$.

Theorem 5

Let us denote μ_2 the first strictly positive eigenvalue of the Neumann problem $-\Delta u = \mu u$, $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0$.

Let $\varepsilon = 0$ or 1.

Then (λ,ε) is not a bifurcation point for equation (1.1) if :

(i) $$0 < \lambda < \frac{\mu_2}{\underset{x \in \Omega}{\text{Sup ess}}\, F'_u(x,\varepsilon)} \quad \textit{and} \quad \int_\Omega F'_u(x,\varepsilon)\, dx \geqslant 0$$

or if

(ii) $$0 < \lambda < \frac{\mu_2 \left| \int_\Omega F'_u(x,\varepsilon)\, dx \right|}{\int_\Omega F'_u(x,\varepsilon)^2\, dx + \left[\underset{x \in \Omega}{\text{Sup ess}}\, F'_u(x,\varepsilon)\right] \left| \int_\Omega F'_u(x,\varepsilon)\, dx \right|}$$

and $$\int_\Omega F'_u(x,\varepsilon)\, dx < 0.$$

■

The proof of theorem 5 lies in fact on the study of the following spectral problem (1) :

For given Ω, a bounded open set in $\mathbb{R}^m$, of class C^2 and $r \in L^\infty(\Omega)$, $r \not\equiv 0$ (we don't make any sign hypothesis on r), to find $(\lambda,u) \in \mathbb{R} \times H^2(\Omega)$ verifying

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \Delta u + \lambda r u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

We note first by the classical results of Agmon-Douglis-Nirenberg [1] and Sobolev imbedding theorem, that $u \in W^{2,p}(\Omega)$, for every p, $1 < p < \infty$ if $m \leq 4$, and $u \in W^{2,2m/(m-4)}(\Omega)$ if $m \geq 5$.

We set $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{R}, \exists u \not\equiv 0 \ ; \ (\lambda,u)$ solution of (4.1)$\}$.

It is easy to see that Σ is discrete and denumerable : The operator A being defined as above, one defines

$$T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \quad \text{by} \quad Tu = Ru.$$

Let us suppose $\Sigma \neq \mathbb{R}$. Then there exists $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ such that $\mathrm{Ker}\,(A+\lambda_0 T) = \{0\}$.

The operator $A + \lambda_0 T$ is Fredholm of index 0 (one remarks that T is compact from $H^2(\Omega)$ to $L^2(\Omega)$: it suffices to use the compactness of the injection $H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ and Lebesgue Theorem).

By Banach theorem, $(A + \lambda_0 T)^{-1}$, is therefore a bounded operator in $L^2(\Omega)$ and is compact (compactness of the injection $H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$).

In particular, $\mathrm{Ker}\,(A + \lambda T) = \mathrm{Ker}\,[(A + \lambda_0 T)^{-1}(A+\lambda T)]$.

---

(1) We have not found any result on this problem in the literature.

But $(A+\lambda_0 T)^{-1}(A+\lambda T) = I + (\lambda-\lambda_0)(A+\lambda_0 T)^{-1}$, and

$\mathrm{Ker}\,[(A+\lambda_0 T)^{-1}(A+\lambda T)] = \mathrm{Ker}\,[I + (\lambda-\lambda_0)(A+\lambda_0 T)^{-1}T]$.

We are therefore reduce to study the spectrum of $I + (\lambda-\lambda_0)(A+\lambda_0 T)^{-1}T$, which is the translated by λ_0 of the spectrum of $I + \lambda(A+\lambda_0 T)^{-1}T = I + \lambda K$.

But K is a compact operator by what precedes, and the announced assertion follows by the spectral theory of compact operators.

The following theorem shows that we always have $\Sigma \neq \mathbb{R}$ and gives an estimate on the first strictly positive eigenvalue of (4.1). We thank L. Tartar who suggested us an improvement of our initial estimate (we obtained $\|r\|_{L^\infty(\Omega)}$ in place of $\operatorname{Ess\,sup}_\Omega r$).

Let us recall that μ_2 is the first strictly positive eigenvalue of the Neumann problem :

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

Theorem 6

Let $-\lambda_1$ be the first strictly positive eigenvalue of (4.1). Then :

$$\lambda_1 \geq \frac{\mu_2}{\operatorname{Ess\,sup}_\Omega r}, \quad \text{if } \int_\Omega r(x)\,dx \geq 0 \tag{4.2}$$

$$\lambda_1 \geq \frac{\mu_2 \left|\int_\Omega r\,dx\right|}{\int_\Omega r^2 dx + [\operatorname{Ess\,sup}_\Omega r]\left|\int_\Omega r\,dx\right|} \tag{4.3}$$

if $\int_\Omega r(x)\,dx < 0$. ∎

Proof

i) If $\int_\Omega r(x)\,dx \neq 0$, let us introduce the operator

$Q_T : Y \to Y = L^2(\Omega)$ defined by :

$$Q_T(u) = u - \left(\frac{\int_\Omega u\,dx}{\int_\Omega r\,dx}\right) r.$$

It is easily verified that :

$\mathrm{Ker}\, Q_T = T(\mathrm{Ker}\, A)$

$R(Q_T) = R(A)$ (where we denote $R(B)$ the range of the operator B)

$Q_T \circ Q_T = Q_T$.

Thanks to projector Q_T, one can decompose Y as $Y = R(A) \oplus Y_2$. On the other hand, the projector $u \to \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx$ induces the decompostiion $X = \mathrm{Ker}\, A \oplus X_2$.

By projection, (4.1) can be then written on the equivalent form :

$$\Delta u_2 + \lambda\left[ru_2 - \left(\frac{\int_\Omega ru_2\,dx}{\int_\Omega rdx}\right) r\right] = 0 \tag{4.4}$$

$$\lambda \frac{1}{\int_\Omega rdx}\left[\int_\Omega r(\alpha+u_2)\,dx\right] r = 0 \tag{4.5}$$

where $u = \alpha.1 + u_2 \in \mathrm{Ker}\, A \oplus X_2$.

Multiplying (4.4) by u_2 and integrating by parts, it follows :

$$-\|\Delta u_2\|_0^2 + \lambda\left[\int_\Omega ru_2^2\,dx - \frac{1}{\int_\Omega rdx}\left(\int_\Omega ru_2 dx\right)^2\right] = 0. \tag{4.6}$$

where $\|.\|_0$ is the norm in $L^2(\Omega)$.

We distinguish now two cases :

α) $\int_\Omega r dx > 0$. Then it results from (4.6) :

$$\|\nabla u_2\|_0^2 \leq \lambda \int_\Omega r u_2^2 dx \leq \lambda (\text{Ess sup}_\Omega r) \|u_2\|_0^2. \tag{4.7}$$

But $\int_\Omega u_2 dx = 0$, so (4.7) implies by Poincaré inequality, (cf. Deny-Lions [4]) :

$$\|\nabla u_2\|_0^2 \leq \frac{\lambda}{\mu_2} (\text{Ess sup}_\Omega r) \|\nabla u_2\|_0^2. \tag{4.8}$$

Therefore, for $\lambda \in]0, \lambda_*[$, where $\lambda_* = \frac{\mu_2}{\text{Ess sup}_\Omega r}$), one has $\nabla u_2 = 0$ a.e. so $u_2 = 0$ a.e. (since $\in X_2$), which with (4.5) implies $\lambda = 0$, and $u \equiv 0$.

β) $\int_\Omega r dx < 0$. Then it results from (4.6) :

$$\|\nabla u_2\|_0^2 \leq \lambda (\text{Ess sup}_\Omega r) \|u_2\|_0^2 + \frac{1}{\left|\int_\Omega r dx\right|} \|r\|_0^2 \|u_2\|_0^2$$

and Poincaré inequality implies :

$$\|\nabla u_2\|_0^2 \leq \frac{\lambda}{\mu_2} \left[(\text{Ess sup}_\Omega r) + \frac{\|r\|_0^2}{\int_\Omega r dx}\right] \|\nabla u_2\|_0^2$$

and one concludes as in case a), but now :

$$\lambda_* = \mu_2 \left(\text{Ess sup}_\Omega r + \frac{\|r\|_0^2}{\left|\int_\Omega r dx\right|} \right)^{-1}.$$

2) When $\int_\Omega r(x)\, dx = 0$, one has to introduce another projection. In fact, one has now : $T(\text{Ker } A) \subset R(A)$ and one cannot decompose Y as in the preceding cases.

Now, by the projector $u \to u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx$, we decompose Y as follows :

$$Y = Y_1 \oplus R(A) \tag{4.9}$$

(Note that here, Y_1 is not equal to $T(\mathrm{Ker}\ A)$).

We introduce now the operator :

$Q_z : R(A) \to R(A)$ defined by

$$Q_z(u) = u - \frac{1}{\int_\Omega r^2 dx}\left[\int_\Omega ru\,dx\right] r .$$

It is easy to check that $\mathrm{Ker}\ Q_z = T(\mathrm{Ker}\ A)$, and

$$R(Q_z) = \{u \in R(A),\quad \int_\Omega ru\,dx = 0\} \overset{\text{def}}{=} Z,$$

and $Q_z \circ Q_z = Q_z$.

This operator induces the decomposition :

$$R(A) = T(\mathrm{Ker}\ A) \oplus Z. \tag{4.10}$$

Using decomposition (4.9) and $\int_\Omega rdx = 0$, equation (4.1) is equivalent to :

$$\Delta u_2 + \alpha\lambda r + \lambda r u_2 = 0 \tag{4.11}$$

$$\int_\Omega ru_2\,dx = 0 \tag{4.12}$$

(with $u = \alpha.1 + u_2$).

Using the decomposition (4.10), the equation (4.11) is equivalent to :

$$\Delta u_2 - \frac{1}{\int_\Omega r^2 dx}\left(\int_\Omega r\,u_2 dx\right) r + \lambda\left[ru - \left(\frac{1}{\int_\Omega r^2 dx}\int_\Omega r^2 u dx\right) r\right] = 0 \tag{4.13}$$

$$\frac{1}{\int_\Omega r^2 dx}\left[r\int_\Omega r\Delta u_2 dx + \lambda r\int_\Omega r^2 u_2 dx\right] + \alpha\lambda r = 0. \tag{4.14}$$

We multiply (4.13) by u_2 and we integrate by parts ; one obtains, by using (4.12) :

(4.15) $\quad - \|\nabla u_2\|_0^2 + \lambda \int_\Omega r u_2^2 \, dx = 0.$

One can then conclude that $u_2 = 0$ a.e. as in the case $\int_\Omega r \, dx > 0$; (4.11) hence implies $\alpha = 0$, so $u \equiv 0$ when $\lambda \in]0, \lambda_*[$ where $\lambda_* = \dfrac{\mu_2}{\operatorname{Ess\,sup}_\Omega r}$.

Remark 5

The estimates (4.2), (4.3) are not optimal. For instance, let $\Omega =]-1,2[$ and r be defined by :

$r(x) = -1 \quad$ if $-1 \leqslant x \leqslant 0$

$r(x) = \dfrac{1}{2} \quad$ if $0 \leqslant x \leqslant 2$

(so $\int_\Omega r \, dx = 0$).

One has here $\mu_2 = \dfrac{\pi^2}{9}$ and $\operatorname{Ess\,sup}_\Omega r = \dfrac{1}{2}$, so $\dfrac{\mu_2}{\operatorname{Ess\,sup}_\Omega} = \dfrac{2\pi^2}{9}$.

But a simple computation shows that the eigenvalues of (4.1) are in this case solutions of the equation $\operatorname{tg} \sqrt{2\lambda} = \sqrt{2} \operatorname{th} \sqrt{\lambda}$.

One easily deduces from this that the first positive eigenvalue of (4.1) is $> \dfrac{\pi^2}{2}$.

Theorem 5 follows readily from theorem 6.

V - FINAL REMARK

We are mainly concerned in this paper with existence of local solutions of (1), i.e. for λ small.

Let us remark however that one can easily get existence of global solutions of (1) in S in some particular cases.

For instance, suppose that there exists a_0, a_1, positive constants such that $0 < a_0 < a_1 < 1$ and $F(x,a_0) < 0$ a.e. in Ω

$F(x,a,) > 0$ a.e. in Ω. Then a_0 is a strict subsolution of (1) and a_1 is a strict supersolution of (1). So by Puel's results [13], there exists for every $\lambda > 0$ a function $u(\lambda) \in H^2(\Omega)$, solution of (1) with $a_0 \leqslant u(\lambda) \leqslant a_1$.

More particularly, in the case of Example 2, the above condition will be satisfied if there exists constants α,β such that $0 < \alpha \leqslant a(x) \leqslant \beta < 1$ a.e. in Ω and $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$. (It suffices then to take $0 < a_0 < \alpha$, $\beta < a_1 < 1$).

This has been observed by Peletier-Fife [5]$_a$ in case of a regular function a.

APPENDIX

For the convenience of the non specialist reader, we recall here some notions used in the theory of singularities of differentiable mappings. (See Zeeman's lecture in [11] for a nice introduction).

Let $\mathcal{E}_n$ be the vector space of germs in 0 of C^∞ functions : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. We set $M = (x_1,\ldots,x_n)$, the maximal ideal of $\mathcal{E}_n$ generated by the germs x_i, $i = 1,\ldots,n$.

If $\eta \in \mathcal{E}_n$, the k-jet $j^k\eta$ is defined by $j^k\mu = \eta_0+\ldots\eta_k$ = Taylor polynomial of η at order k.

Two germs $\eta, \xi \in \mathcal{E}_n$ are said to be k-equivalent if they have same k-jet, i.e. $j^k\eta = j^k\xi$. We then note $\eta \overset{k}{\sim} \xi$.

A germ $\eta \in \mathcal{E}_n$ is said to be k-determinate if for every $\xi \in \mathcal{E}_n$, the relation $\eta \overset{k}{\sim} \xi$ implied $\eta \sim \xi$ (i.e there exists a germ of C^∞-diffeomorphism γ such that $\eta = \xi\gamma$). Clearly, η k-determinate is equivalent to $j^k\eta$ k-determinate.

For $n \in \mathcal{E}_n$, one defines the jacobian ideal of n by

$\Delta(n) = \left(\frac{\partial n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial n}{\partial x_n}\right)$.

We have then a criterion of k-determinacy, due to J. Mather.

Theorem (of Zeeman [II] p. 874)

Let $n \in \mathcal{M}$. Then $M^k \subset M\Delta(n)$ implies that n is k-determinate.

An easy computation then shows that the hyperbolic umbilic $n = x^3 + y^3$ and the elliptic umbilic $n = x^3 - xy^2$ are3-determinate.

REFERENCES

[1] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, I. Comm. Pure Appl. Math. 12, (1959), p. 623-727.

[2] S. CHOW, J.K. HALE, J. MALLET-PARET *Applications of generic bifurcation I*, Arch. Rat. Mech. Anal. 59, (1975) p. 159-188.

[3] M. CRANDALL, P.H. RABINOWITZ, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Funct. Anal., 8, (1971), p.321-340.

[4] J. DENY, J.L. LIONS, *Les espaces du type de Beppo Levi*, Ann. Inst. Fourier, 5, (1953-54), p. 305-370.

[5]$_a$ L.A. PELETIER, *On a nonlinear diffusion equation arising in population genetics*, Proc. 4th Conference on ordinary and partial differential ecuations at Dundee, Springer Lecture Notes (564), 1976.

[5]$_b$ L.A. PELETIER, *A non linear eigenvalue problem occuring in population genetics*, to appear.

[6] W.H. FLEMING, *A selection-migration model in population genetics*, J. Math. Biol., 2 (1975), p. 219-234.

[7] J.L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes*, I. Dunod, Paris (1968).

[8] L. NIRENBERG, *Topics on non linear functional analysis*, Courant Institute, Lecture Notes, (1974).

[9] B. SCHEURER, *Exposé N° 3 dans le séminaire d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, Orsay (1975-1976). Publications Mathématiques d'Orsay N° 77-76.

[10] M. SLATKIN, *Gene flow and selection in a clone*, Genetics 75, (1973), p. 733-756.

[11] E.C. ZEEMAN, *The classification of elementary catastrophes of codimension 5*, Notes by D.J.A. Trotman, in Structural stability, the theory of catastrophes and applications in the sciences, edited by P. Hilton, Lectures Notes in Mathematics N° 525, Springer Verlag, (1976).

[12] F.C. HOPPENSTEADT, *Analysis of a stable polymorphism arising in a selection-migration model in population genetics*, J. Math. Biol. 2, (1975) p. 235-240.

[13] J.P. PUEL, *Existence, comportement à l'infini et stabilité dans certains problèmes quasi linéaires elliptiques et paraboliques d'ordre 2*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. IV, 3, (1976), p. 75-119.

Received March 1978

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 290 (31 mars 1980) Série A — 595

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — *Un théorème de prolongement unique pour des opérateurs elliptiques dont les coefficients ne sont pas localement bornés.* Note (*) de **Jean-Claude Saut** et **Bruno Scheurer**, présentée par Jacques-Louis Lions.

On montre un théorème de prolongement unique pour des opérateurs elliptiques du deuxième ordre du type

$$-\Sigma a_{ij} u_{x_i x_j} + \Sigma b_i u_{x_i} + cu$$

où $b_i \in L^{2n+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ et $c \in L^{2n/3+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$.

We prove a unique continuation theorem for second order elliptic operators of type

$$-\Sigma a_{ij} u_{x_i x_j} + \Sigma b_i u_{x_i} + cu$$

when $b_i \in L^{2n+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ *and* $c \in L^{2n/3+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$.

1. POSITION DU PROBLÈME. — Soit

$$Pu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u,$$

un opérateur uniformément elliptique du second ordre, à coefficients réels, dans un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^n$, $n \geqq 3$. Il est bien connu (*voir* par exemple [3], [4]) que si les a_{ij} sont lipschitziens et bornés, b_i, $c \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$, alors l'opérateur P possède la propriété de prolongement unique :

(PU) Soit $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ une solution de $Pu = 0$ telle que $u = 0$ p. p. sur un ouvert non vide de Ω. Alors $u \equiv 0$ p. p.

Nous nous proposons dans cette Note d'affaiblir les hypothèses sur les coefficients de l'opérateur P [1]. On considère ici le cas où les coefficients de la partie non principale ne sont pas localement bornés, ceux de la partie principale étant de classe $\mathscr{C}^1$. Notre résultat est alors le suivant :

THÉORÈME 1. — *On suppose que* $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b_i \in L^{2n+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$, $c \in L^{(2n/3)+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$. *Alors* P *vérifie* (PU).

Remarque 1. — Un tel résultat peut être utile pour étudier des opérateurs linéaires obtenus par linéarisation en une solution peu régulière d'une équation elliptique quasi linéaire. On peut ainsi affaiblir les hypothèses de certains théorèmes de généricité (*cf.* [8]). C'est ce qui a motivé notre étude.

Un autre intérêt est l'étude d'opérateurs de Schrödinger $-\Delta + V$ à potentiel V non localement borné (*cf.* [7]) : non existence de solutions à support compact, outil pour la non-existence de valeurs propres positives...

Remarque 2. — Dans un travail non publié, nous obtenions déjà le théorème 1 en supposant $b_i \in L^{2n+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ et $c \in L^{n+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$. Le professeur B. Simon nous a signalé des résultats récents voisins pour le seul opérateur $-\Delta + V$ dans $\mathbb{R}^n$: B. Simon et M. Schechter [9] montrent (PU) si $V \in L^{n-2}_{loc}(\mathbb{R}^n)$; leur preuve utilise largement les harmoniques sphériques. W. O. Amrein, A. M. Berthier et V. Georgescu ont obtenu un résultat similaire (*cf.* [10]).

2. IDÉE DE LA PREUVE DU THÉORÈME 1. — On peut évidemment supposer que Ω est borné. La preuve repose alors sur l'obtention d'une inégalité de Carleman en norme L^p pour l'opérateur P. On montre d'abord la :

PROPOSITION 1. — *Soit* $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, *telle que* grad $\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega$ *et vérifiant la condition de pseudo-convexité de Hörmander* (cf. [4], p. 190). *Soit* $\varepsilon > 0$. *Il existe* p, r *vérifiant* $2 < r < p < \infty$:

$$\frac{2p}{p-2} > \frac{2n}{3}, \qquad \frac{2r}{r-2} > 2n,$$

et une constante positive K *tels que*

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\tau^{\varepsilon}\left(\|ue^{\tau\varphi}\|_{0,p} + \sum_{j=1}^{n} \|u_{x_j} e^{\tau\varphi}\|_{0,r}\right) + \tau^{3/2}\|ue^{\tau\varphi}\|_{0,2} \\ &\qquad + \tau^{1/2} \sum_{j=1}^{n} \|u_{x_j} e^{\tau\varphi}\|_{0,2} \leqq K \|P ue^{\tau\varphi}\|_{0,2} \quad [2] \\ &\forall u \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall \tau \text{ assez grand.} \end{aligned} \right.$$

Preuve de la proposition 1. — Soit $P_2(x, D)$ la partie principale de P.

(*a*) On montre d'abord (1) pour $P = P_2$.

D'après Hörmander (*cf.* [4], th. 8.3.1, p. 190), on a sous les hypothèses de la proposition 1 :

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\tau^4 \int_\Omega |u|^2 e^{2\tau\varphi}\, dx + \tau^2 \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} |u_{x_j}|^2 e^{2\tau\varphi}\, dx \\ &\qquad + \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{n} |u_{x_j x_k}|^2 e^{2\tau\varphi}\, dx \leqq K\tau \int_\Omega |P_2(x, D)u|^2 e^{2\tau\varphi}\, dx, \\ &\forall u \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^+ \text{ assez grand.} \end{aligned} \right.$$

Récrivons (2) en posant $v = ue^{\tau\varphi}$ et $P_\tau(x, D) = e^{\tau\varphi} P_2(x, D) e^{-\tau\varphi}$. Il vient alors (notant désormais K des constantes positives indépendantes de u et τ) :

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\tau^4 \int_\Omega |v|^2\, dx + \tau^2 \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} |v_{x_j}|^2\, dx + \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{n} |v_{x_j x_k}|^2\, dx \leqq K\tau \int_\Omega |P_\tau(x, D)v|^2\, dx, \\ &\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall \tau \text{ assez grand.} \end{aligned} \right.$$

Pour $\tau > 1$, on obtient donc

$$\tau^{1/2}\|v\|_{1,2} \leqq K\|P_\tau(x, D)v\|_{0,2}$$
$$\tau^{-1/2}\|v\|_{2,2} \leqq K\|P_\tau(x, D)v\|_{0,2},$$

d'où par interpolation

$$(4)\qquad \tau^{\varepsilon}\|v\|_{(3/2)-\varepsilon,2} \leqq K\|P_\tau(x, D)v\|_{0,2}, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Choisissons m', m'' tels que

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &m' \leqq -n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right), \\ &m'' \leqq -n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) \quad \text{où} \quad 2 \leqq r \leqq p \leqq \infty. \end{aligned} \right.$$

Il résulte alors du théorème de plongement de Sobolev que :

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{où} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \begin{array}{c} (1+|D|^2)^{m'/2} : \ L^2(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \\ \\ |D|^2 = -\Delta. \\ (1+|D|^2)^{m''/2} : \ L^2(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n). \end{array}$$

On a alors :

$$(7)\quad \tau^\varepsilon \left(\|v\|_{0,p} + \sum_{j=1}^n \|v_x\|_{0,r} \right) \leqq \tau^\varepsilon K \left\{ \|(1+|D|^2)^{-(m'/2)-1/2(3/2)-\varepsilon)} v\|_{3/2-\varepsilon,2} + \sum_{j=1}^n \|(1+|D|^2)^{-(m''/2)-1/2(3/2-\varepsilon)} v_{x_j}\|_{3/2-\varepsilon,2} \right\}.$$

Après quelques manipulations, tenant compte de (4), (5), (6) on arrive à

$$\tau^\varepsilon \left(\|v\|_{0,p} + \sum_{j=1}^n \|v_{x_j}\|_{0,r} \right) \leqq K \left\{ \|P_\tau(x,D)(1+|D|^2)^{-(m'/2)-1/2(3/2)-\varepsilon)} v\|_{0,2} + \|P_\tau(x,D)(1+D|^2)^{-(m''/2)-1/2((1/2)-\varepsilon)} v\|_{0,2} \right\}.$$

Prenons maintenant $m' = -(3/2)+\varepsilon$, $m'' = -(1/2)+\varepsilon$. Ce choix conduit à $p \leqq (2n/(n-3+2\varepsilon))$ et $r \leqq (2n/(n-1+2\varepsilon))$ ce qui est compatible avec $2 \leqq r \leqq p$.

Il vient alors :

$$(8)\quad \tau^\varepsilon \left(\|v\|_{0,p} + \sum_{j=1}^n \|v_{x_j}\|_{0,r} \right) \leqq K \|P_\tau(x,D)v\|_{0,2}.$$

Revenant à $u = ve^{-\tau\varphi}$ *et utilisant* (8) *on obtient :*

$$(9)\quad \tau^\varepsilon \left(\|ue^{\tau\varphi}\|_{0,p} + \sum_{j=1}^n \|(ue^{\tau\varphi})_{x_j}\|_{0,r} \right) + \tau^{3/2}\|ue^{\tau\varphi}\|_{0,2} + \tau^{1/2} \sum_{j=1}^n \|u_{x_j} e^{\tau\varphi}\|_{0,2} \leqq K \|P_2(x,D)ue^{\tau\varphi}\|_{0,2}.$$

On obtient par interpolation à partir de (9) $\tau^{1+\varepsilon}\|ue^{\tau\varphi}\|_{0,r} \leqq K\|P_2(x,D)ue^{\tau\varphi}\|_{0,2}$ pourvu que $r < 3p/(p+1)$; finalement (9) devient :

$$(10)\quad \tau^\varepsilon \left(\|ue^{\tau\varphi}\|_{0,p} + \sum_{j=1}^n \|u_{x_j} e^{\tau\varphi}\|_{0,r} \right) + \tau^{3/2}\|ue^{\tau\varphi}\|_{0,2} + \tau^{1/2} \sum_{j=1}^n \|u_{x_j} e^{\tau\varphi}\|_{0,2} \leqq K \|P_2(x,D)ue^{\tau\varphi}\|_{0,2}.$$

(*b*) *Fin de la preuve de la proposition* 1. — On remplace dans (10) $P_2(x,D)u$ par

$$Pu - \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} - c(x)u.$$

D'après l'inégalité de Hölder,

$$\|b_i(x) u_{x_i} e^{\tau\varphi}\|_{0,2} \leqq \|b_i\|_{0,2r/(r-2)} \|u_{x_i} e^{\tau\varphi}\|_{0,r}$$

et

$$\| c(x) u e^{\tau\varphi} \|_{0,2} \leqq \| c \|_{0,2p/(p-2)} \| u e^{\tau\varphi} \|_{0,p},$$

d'où (1) puisque $p \leqq (2n/(n-3+2\varepsilon))$ [resp. $r \leqq (2n/(n-1+2\varepsilon))$] équivaut à $((2p/(p-2)) \geqq (2n/3)+\varepsilon'$ [resp. $(2r/(r-2)) \geqq 2n+\varepsilon'$].

De la proposition 1 on déduit comme dans [4], p. 224, l'unicité pour le problème de Cauchy, et par exemple par un argument de réflection (*cf.* [5]) le théorème 1.

Remarque 3. – Le théorème 1 conduit facilement à un résultat de prolongement unique pour des inéquations différentielles de la forme

$$|P_2(x, D)u| \leqq a(x)|u(x)|, \qquad a \geqq 0, \quad a \in L_{loc}^{(2n/3)+\varepsilon}(\Omega),$$

ou

$$|P_2(x, D)u| \leqq b(x)(|u(x)| + |\nabla u(x)|), \qquad b \geqq 0, \quad b \in L_{loc}^{2n+\varepsilon}(\Omega).$$

3. Extensions. – On peut obtenir par la même méthode des théorèmes de prolongement unique pour des perturbations d'ordre $< m$, à coefficients non localement bornés, de certains opérateurs elliptiques homogènes d'ordre $m > 2$: opérateurs à caractéristiques complexes simples ou produit d'opérateurs à caractéristiques complexes simples (par exemple Δ^2). Ceci sera développé dans un article en cours de rédaction où l'on trouvera une preuve détaillée du théorème 1 et la cas d'une perturbation de l'opérateur de Stokes.

A. M. Berthier nous a signalé que V. Georgescu [11] obtient un résultat similaire au notre pour l'opérateur $-\Delta + V$ dans $\mathbb{R}^n$.

(*) Remise le 17 mars 1980.

[1] Il y a peu d'espoir d'affaiblir les hypothèses sur les a_{ij}, comme le montre un contre-exemple de Plis [6].

[2] On note $\| . \|_{s,p}$ la norme dans l'espace de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$.

[3] S. Agmon, *Unicité et convexité dans les problèmes différentiels*, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1966.

[4] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[5] L. Nirenberg, *Comm. Pure Appl. Math. X*, 1957, p. 89-105.

[6] A. Plis, *Bull. Acad. polonaise des Sciences*, Série des Sciences Math., XI, n° 3, 1963, p. 95-100.

[7] M. Reed et B. Simon, *Method of Modern Mathematical Physics*, 4, *Analysis of Operators*, Academic Press, New York, 1978.

[8] J. C. Saut et R. Temam, *Comm. in Partial Diff. Equ.*, 4 (3), 1979, p. 293-319.

[9] M. Schechter et B. Simon, *J. Math. Anal. and Appl.* (à paraître).

[10] A. M. Berthier, *Comptes rendus*, 290, série A, 1980, p. 393.

[11] V. Georgescu, *Helv. Phys. Acta* (à paraître).

Bât. n° 425, *Université Paris-Sud*, 91405 *Orsay*.

PREPUBLICATIONS

SUR L'UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY ET LE PROLONGEMENT UNIQUE POUR DES EQUATIONS ELLIPTIQUES A COEFFICIENTS NON LOCALEMENT BORNES

J.C. SAUT et B. SCHEURER

80T.36

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

SUR L'UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY ET LE PROLONGEMENT UNIQUE POUR DES EQUATIONS ELLIPTIQUES A COEFFICIENTS NON LOCALEMENT BORNES

J.C. Saut et B. Scheurer

Introduction

Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et P un opérateur différentiel elliptique d'ordre $m \geq 2$. On dit que P a la propriété de prolongement unique (faible), ou de quasi-analyticité si la propriété suivante a lieu.

(P.U.) Soit $u \in H^m_{loc}(\Omega)$ une solution de $Pu = 0$ telle que $u = 0$ p.p. sur un ouvert non vide de Ω. Alors $u \equiv 0$ dans Ω.

L'étude de cette propriété a donné lieu à une littérature abondante depuis le travail de Carleman [5] établissant (P.U.) pour des solutions régulières, dans le cas $m=n=2$. Pour les opérateurs du second ordre, on peut citer Müller [16], Heinz [11] (opérateurs à partie principale Δ) et Aronszajn [3] (cas général). Plus généralement, on trouvera dans Hörmander [12] la preuve de (P.U.) pour des opérateurs elliptiques d'ordre $m \geq 2$, à caractéristiques complexes simples, ainsi qu'une bibliographie détaillée sur le sujet. Ces résultats sont établis pour des opérateurs dont (dans les versions

optimales), les coefficients de la partie principale sont lipschitziens et bornés, ceux de la partie non principale étant localement bornés.

En ce qui concerne les opérateurs elliptiques à caractéristiques complexes multiples, on sait depuis un contre exemple de Plís [20] (voir aussi Cohen [6]) que (P.U.) n'est pas forcément vraie. Toutefois cette propriété subsiste dans certains cas (cf. Mizohata [15], Pederson [18], Hörmander [13], Watanabe [28], Sussman [27]), Goorjian [8] mais tous les termes d'ordre inférieur ne sont pas en général permis.

Nous nous proposons dans ce travail d'affaiblir les hypothèses de régularité sur les coefficients des opérateurs. Le problème est sans espoir pour les coefficients de la partie principale, depuis qu'un contre exemple de Plís [21] montre que (P.U.) ne subsiste plus si un coefficient de la partie principale est höldérien, les autres étant très réguliers. Nous nous intéressons donc aux coefficients non principaux et nous montrons que la propriété (P.U.) a encore lieu si ces coefficients appartiennent à un certain L^p_{loc} (p dépendant de l'ordre de l'opérateur, de sa multiplicité, de l'ordre du coefficient et de la dimension de l'espace).

Pour ce faire, il est bien connu qu'il suffit d'établir une inégalité de Carleman. Nous partons alors des inégalités classiques de Carleman en norme L^2 pour la partie principale de l'opérateur (celles de Hörmander pour les opérateurs à caractéristiques complexes simples, celles de Watanabe, Sussman pour les opérateurs à caractéristiques multiples) pour en dériver, essentiellement par des arguments d'interpolation, des estimations de Carleman en norme L^q , $q\neq 2$, pour la partie principale.

On peut alors en déduire une estimation de Carleman pour des perturbations par des opérateurs d'ordre inférieur, à coefficients L^p_{loc} , p convenable. Par des arguments classiques, on obtient alors l'unicité du problème de Cauchy, puis la propriété de prolongement unique.

Dans un travail en préparation, nous étudions le cas de certains systèmes elliptiques dont les éléments ont des ordres différents (systèmes elli-

-tiqu

au sens d'Agmon-Douglis-Nirenberg [1]) et vérifiant l'hypothèse (assez restrictive) que les racines complexes du déterminant du symbole "principal" sont simples. Nous établissons d'abord une inégalité de Carleman L^2 pour le système non perturbé en suivant une méthode suggérée par Hörmander (cf. [14]) : on travaille sur le déterminant des parties principales. L'inégalité de Carleman L^p conduisant au prolongement unique pour le système perturbé s'en déduit alors comme dans le cas des équations scalaires.

De tels résultats de prolongement unique peuvent être utiles pour l'étude d'opérateurs elliptiques obtenus par linéarisation en une solution peu régulière d'équations quasi linéaires. On peut par exemple affaiblir certaines hypothèses de régularité dans des théorèmes de généricité établis par R. Temam et l'un des auteurs ([24]-[25]). C'est ce qui a motivé notre étude. On peut aussi en déduire des théorèmes de prolongement unique pour des équations (ou inéquations) elliptiques quasi-linéaires à non-linéarité peu régulière en x .

Un autre intérêt est l'étude d'opérateurs de Schrödinger $-\Delta + V$ dans $\mathbb{R}^n$ à potentiel V non localement borné : non-existence de fonctions propres à support compact, outil pour montrer la non-existence de valeurs propres positives (cf. Reed-Simon [22]).

Ce courant d'idées a donné lieu à une série de travaux sur le prolongement unique pour l'opérateur de Schrödinger, indépendants des nôtres [(1)] : B. Simon-M. Schechter [26], W.O. Amrein, A.M. Berthier, V. Georgescu [2], V. Georgescu [7], A.M. Berthier [4].

Les travaux [2], [4], [26] dont les méthodes sont assez différentes des nôtres (et souvent particulières au laplacien) prouvent un théorème de prolongement unique pour $V \subset L^{n-2+\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, alors que nos résultats particularisés à ce cas fournissent $L^{\frac{2n}{3}+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$. Ils sont par contre meilleurs en basse dimension d'espace ($n \leq 5$) ; en particulier, A.M. Berthier [4] obtient P.U.

---

(1) Ils nous ont été mentionnés par B. Simon et A.M. Berthier

si $V \in L^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$, ce qui paraît le résultat optimal. Le travail [7] obtient des résultats comparables aux nôtres, toujours pour $-\Delta + V$.

Cet article développe une Note aux Comptes Rendus ([23]). Les auteurs remercient S. Alinhac et G. Geymonat pour de fructueuses discussions au cours de la préparation de ce travail.

1. Le cas des opérateurs elliptiques à caractéristiques complexes simples.

Soit $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a^{\alpha}(x)\, D^{\alpha}$ un opérateur uniformément elliptique d'ordre $m \geq 2$ à coefficients réels, dans un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^n$.

Soit $P_m(x,D) = \sum_{|\alpha|=m} a^{\alpha}(x)\, D^{\alpha}$ la partie principale de P . On suppose que $a_{\alpha} \in C^1(\bar{\Omega})$ pour $|\alpha| = m$ et que P_m est à caractéristiques complexes simples.

Rappelons que cela signifie que le polynôme en ζ_1 (par exemple) $P_m(x,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ a des zéros (complexes) distincts pour tout $x \in \Omega$ et tout $(\xi_2,\ldots,\xi_n)$ réels $\neq (0,0,\ldots,0)$.

Avant d'énoncer le résultat essentiel de ce paragraphe, il nous faut introduire quelques notations.

. Soit $\varepsilon > 0$. On définit deux suites de réels p_k, q_k $0 \leq k \leq m-1$ de la façon suivante :

(i) si $n \geq 2m-1$, on pose $p_0 = \dfrac{2n}{n+1+2\varepsilon-2m}$

et $p_{k+1} = \dfrac{2p_k(m-1/2-\varepsilon)}{(k+1)p_k+2m-3-2\varepsilon-2k}$ $\quad k = 0,1,\ldots,m-1.$

$$q_0 = \frac{2n}{2m-1-4\varepsilon} \quad , \qquad q_{k+1} = \frac{2n(2m-1-2\varepsilon)^k}{\prod_{j=0}^{k}(2m-3-2j-2\varepsilon)} \quad , \quad 0 \leq k \leq m-2$$

(ii) Si $n \leqslant 2m-2$, on prend p_o arbitraire (tendant vers $+\infty$)

$$p_1 = 2(m-\tfrac{1}{2}-2\varepsilon) \text{ , et } p_{k+1} = \frac{2p_k(m-\frac{1}{2}-\varepsilon)}{(k+1)p_k+2m-3-2\varepsilon-2k} \qquad 1\leqslant k\leqslant m-2$$

$$q_o = 2+\varepsilon \text{ , } q_1 = \frac{2(2m-1-4\varepsilon)}{2m-3-4\varepsilon}$$

$$q_{k+1} = \frac{2(2m-1-4\varepsilon)}{2m-3-4\varepsilon} \quad \frac{(2m-1-2\varepsilon)^k}{\prod_{j=1}^{k}(2m-3-2j-2\varepsilon)} \qquad 1\leqslant k\leqslant m-2$$

Théorème 1. *On suppose que* $a^\alpha \in C^1(\bar{\Omega})$ $\quad |\alpha|=m$

et $a^\alpha \in L^{q_k}_{loc}(\Omega)$ $\quad |\alpha|=k \qquad 0\leqslant k\leqslant m-1$

Alors P *vérifie (P.U.)* .

Preuve du Théorème 1 :

On peut évidemment supposer que Ω est borné. Comme il était indiqué dans l'Introduction, la preuve est basée sur la dérivation d'une inégalité de Carleman en norme L^p pour l'opérateur P .
De façon plus précise, on va montrer la

Proposition 1. *(Les notations sont celles du Théorème 1)*
Soit $\phi \in C^\infty(\bar{\Omega},\mathbb{R})$ *telle que* $\operatorname{grad}\phi(x) \neq 0$ *pour* $x \in \Omega$ *et vérifiant la condition de pseudo-convexité forte d'Hörmander (cf.* |12| *p.190).*
Alors il existe $K>0$ *telle que*

$$\tau^\varepsilon \|u.e^{\tau\phi}\|_{o,p_o} + \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u.e^{\tau\phi}\|_{o,p_1} + \ldots + \sum_{|\alpha|=m-1} \|D^\alpha u.e^{\tau\phi}\|_{o,p_{m-1}} + \sum_{|\alpha|\leqslant m} \tau^{m-|\alpha|-\frac{1}{2}} \|D^\alpha u.e^{\tau\phi}\|_{o,2} \qquad (1)$$

$$\leqslant K \|P(x,D)u.e^{\tau\phi}\|_{o,2} \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ , } \forall\, \tau \text{ assez grand.} \qquad (1.1)$$

(1) *On note* $\|.\|_{s,p}$ *la norme dans l'espace de Sobolev* $W^{s,p}(\Omega)$.

Preuve de la Proposition 1 :

a) On va d'abord montrer (1.1) pour $P = P_m$.

D'après un résultat d'Hörmander (cf. |12| Theorem 8.3.1. p.190) on a, sous les hypothèses de la Proposition 1 :

$$(1.2)\qquad \sum_{|\alpha|\leq m} \tau^{2(m-|\alpha|)} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, e^{2\tau\phi}\, dx \leq K\tau \int_\Omega |P_m(x,D)u|^2 \, e^{2\tau\phi}\, dx$$
$$\forall\, u \in \mathcal{D}(\Omega)\ ,\quad \forall\, \tau \in \mathbb{R}^+ \text{ assez grand.}$$

En posant $v = u.e^{\tau\phi}$, $P_\tau(x,D) = e^{\tau\phi}\, P_m(x,D)\, e^{-\tau\phi}$, (1.2) devient (en notant K diverses constantes positives indépendantes de u et τ) :

$$(1.3)\qquad \sum_{|\alpha|\leq m} \tau^{2(m-|\alpha|)} \int_\Omega |D^\alpha v|^2 dx \leq K\tau \int_\Omega |P_\tau(x,D)v|^2 dx$$
$$\forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega)\ ,\quad \forall\ \tau \text{ assez grand.}$$

Pour $\tau>1$ on obtient

$$(1.4)\qquad \begin{cases} \tau^{\frac{2m-1}{2}} \|v\|_{0,2} \leq K \|P_\tau(x,D)v\|_{0,2} \\ \tau^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{m,2} \leq K \|P_\tau(x,D)v\|_{0,2} \ . \end{cases}$$

D'où par interpolation :

$$(1.5)\qquad \tau^{\varepsilon} \|v\|_{m-\frac{1}{2}-\varepsilon,2} \leq K\|P_\tau(x,D)v\|_{0,2} \quad \forall\, \varepsilon>0\ ,\ \tau>1\ .$$

Introduisons maintenant des nombres réels p_i , $0\leq i\leq m-1$ vérifiant

$$(1.6)\qquad 2 < p_{m-1} \leq p_{m-2} < \ldots \leq p_0 < +\infty$$

et s_i, $0\leq i\leq m-1$ tels que

(1.7) $$s_i \leq -n\,(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{p_i})\ .$$

Notant $|D|^2 = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, il résulte alors de (1.7) et du Théorème de plongement de Sobolev que :

(1.8) $$(1+|D|^2)^{s_i/2} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{p_i}(\mathbb{R}^n) \quad \text{continûment.}$$

On en déduit alors

$$\tau^{\varepsilon}\,(\|v\|_{o,p_o} + \sum_{|\alpha|=1} \|D^{\alpha}v\|_{o,p_1} + \ldots + \sum_{|\alpha|=m-1} \|D^{\alpha}v\|_{o,p_{m-1}})$$

$$\tau^{\varepsilon}\,K\Big\{\|(1+|D|^2)^{-\frac{s_o}{2}-\frac{1}{2}(m-\frac{1}{2}-\varepsilon)}\, v\|_{m-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}$$

(1.9) $$+ \sum_{|\alpha|=1} \|(1+|D|^2)^{-\frac{s_1}{2}-\frac{1}{2}(m-\frac{1}{2}-\varepsilon)}\, D^{\alpha}v\|_{m-\frac{1}{2}-\varepsilon,2} + \ldots$$

$$+ \sum_{|\alpha|=m-1} \|(1+|D|^2)^{-\frac{s_{m-1}}{2}-\frac{1}{2}(m-\frac{1}{2}-\varepsilon)}\, D^{\alpha}v\|_{m-\frac{1}{2}-\varepsilon,2}\Big\}$$

On obtient alors :

$$\tau^{\varepsilon}(\|v\|_{0,p_0} + \sum_{|\alpha|=1} \|D^{\alpha}v\|_{0,p_1} + \ldots + \sum_{|\alpha|=m-1} \|D^{\alpha}v\|_{0,p_{m-1}}$$

$$(1.10) \qquad \leqslant \tau^{\varepsilon} K \sum_{j=0}^{m-1} \|(1+|D|^2)^{-\frac{s_j}{2} - \frac{1}{2}(m-j-\frac{1}{2}-\varepsilon)} v\|_{m-\frac{1}{2}-\varepsilon,2} .$$

Prenons maintenant

$$(1.11) \qquad s_j = -(m - j - \tfrac{1}{2} - \varepsilon) \quad , \quad j=0,1,\ldots,m-1 .$$

Compte tenu de (1.7), ce choix conduit à

$$(1.12) \qquad \begin{cases} p_j \leqslant \dfrac{2n}{n+2j+1+2\varepsilon-2m} & j=0,1,\ldots,m-1 \\ \text{si} \quad n>2m-2j-1-2\varepsilon \end{cases}$$

$$(1.13) \qquad \begin{cases} p_j \quad \text{quelconque} \quad (\geqslant 2) \\ \text{si} \quad n\leqslant 2m-2j-1-2\varepsilon. \end{cases}$$

Il vient alors

$$(1.14) \qquad \tau^{\varepsilon}(\|v\|_{0,p_0} + \sum_{|\alpha|=1} \|D^{\alpha}v\|_{0,p_1} + \ldots + \sum_{|\alpha|=m-1} \|D^{\alpha}v\|_{0,p_{m-1}})$$

$$\leqslant K\|P_{\tau}(x,D)v\|_{0,2}$$

Revenant maintenant à $u = v\, e^{-\tau\phi}$ et utilisant (1.14) et (1.2), il vient :

$$(1.15)\qquad \tau^{\varepsilon}\Big\{ \|u\, e^{\tau\phi}|_{0,p_0} + \sum_{|\alpha|=1} \|D^{\alpha}(u\, e^{\tau\phi})\|_{0,p_1} + \dots + \sum_{|\alpha|=m-1} \|D^{\alpha}(u\, e^{\tau\phi})\|_{0,p_{m-1}} \Big\}$$

$$+ \sum_{|\alpha|\le m} \tau^{m-|\alpha|-\frac{1}{2}} \|(D^{\alpha}u)\, e^{\tau\phi}\|_{0,2} \le K \|P_m(x,D)u\, e^{\tau\phi}\|_{0,2} .$$

D'après la formule de Leibniz et les hypothèses faites sur ϕ :

$$D^{\alpha}(u\, e^{\tau\phi}) = \sum_{0\le|j|\le|\alpha|} \tau^{|\alpha|-|j|}\, c_j (D^j u) e^{\tau\phi} \quad , \text{ où } \quad c_j \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) .$$

Il nous faut donc estimer des termes de la forme

$$\tau^{|\alpha|+\varepsilon-|j|} \|(D^j u) e^{\tau\phi}\|_{L^{p_{|\alpha|}}} \quad \text{pour} \quad 0\le|j|\le|\alpha|-1 \ , \text{ et } \ 1\le|\alpha|\le m-1 .$$

Nous procédons en chaîne de la façon suivante, en interpolant les inégalités contenues dans (1.15) :
on écrit

$$L^{p_i^1} = (L^{p_0}, L^2)_{\theta_i^{\circ}, p_i^1} \quad (1) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p_i^1} = \frac{1-\theta_i^{\circ}}{p_0} + \frac{\theta_i^{\circ}}{2} ,$$

et on obtient d'abord

$$(1.16)\qquad \tau^{i+\varepsilon} \|u\, e^{\tau\phi}\|_{0,p_i} \le K \|P_m(x,D)u\, e^{\tau\phi}\|_{0,2} \ , \ 1\le i\le m-1$$

pourvu que

$$(1.17)\qquad p_i \le \frac{2p_0(m-\frac{1}{2}-\varepsilon)}{ip_0+2m-1-2\varepsilon-2i} = p_i^1 .$$

On déduit en particulier de (1.15) et (1.16) (écrite pour $i=1$) que

$$(1.18)\qquad \tau^{\varepsilon} \sum_{|\alpha|=1} \|(D^{\alpha}u)e^{\tau\phi}\|_{0,p_1} \le K \|P_m(x,D)u\, e^{\tau\phi}\|_{0,2} .$$

---

(1) Interpolés par la méthode réelle de Peetre

Ecrivant maintenant $L^{p_i^2} = (L^{p_1}, L^2)_{\theta_i^1, p_i^2}$ avec $\frac{1}{p_i^2} = \frac{1-\theta_i^1}{p_1} + \frac{\theta_i^1}{2}$,

on obtient à partir de (1.15) et (1.18) :

$$(1.19) \qquad \tau^{i+\varepsilon-1} \sum_{|\alpha|=1} \| (D^\alpha u) e^{\tau\phi} \|_{o,p_i} \leqslant K \| P_m(x,D) u \, e^{\tau\phi} \|_{o,2} \ , \quad 2 \leqslant i \leqslant m-1$$

pourvu que

$$(1.20) \qquad p_i \leqslant \frac{2p_1(m-\frac{1}{2}-\varepsilon)}{ip_1+2m-1-2\varepsilon-2i} = p_i^2 \ .$$

On déduit alors de (1.15) et (1.19) (écrite pour $i=2$) que

$$(1.21) \qquad \tau^{\varepsilon} \sum_{|\alpha|=2} \| (D^\alpha u) e^{\tau\phi} \|_{o,p_2} \leqslant K \| P_m(x,D) u \, e^{\tau\phi} \|_{o,2} \ .$$

On réitère alors le procédé pour arriver à

$$\tau^{\varepsilon} \sum_{|\alpha|=m-1} \| (D^\alpha u) e^{\tau\phi} \|_{o,p_{m-1}} \leqslant K \| P_m(x,D) u \, e^{\tau\phi} \|_{o,2} \ .$$

L'estimation (1.1) est alors démontrée, sous réserve de vérifier que les inégalités du type (1.17), (1.20), i.e.

$$(1.22) \qquad p_i \leqslant \frac{2p_k(m-\frac{1}{2}-\varepsilon)}{ip_k+2m-1-2\varepsilon-2i} \qquad 0 \leqslant k \leqslant m-2 \ , \ k+1 \leqslant i \leqslant m-1$$ (1)

sont compatibles avec (1.12), (1.13).

D'après (1.6), il suffit en fait de vérifier que l'on peut choisir p_k vérifiant (1.12), (1.13) et :

$$(1.23) \qquad p_{k+1} \leqslant \frac{2p_k(m-\frac{1}{2}-\varepsilon)}{(k+1)p_k+2m-3-2\varepsilon-2k} \qquad 0 \leqslant k \leqslant m-2$$

---

(1) Remarquons que $i(p_k-2)+2m-1-2\varepsilon > 0$ puisque $p_k \geqslant 2$ et $m \geqslant 2$.

Pour cela, on prend d'abord $p_0 = \frac{2n}{n+1+2\varepsilon-2m}$, puis $p_{k+1} = \frac{2p_k(m-\frac{1}{2}-\varepsilon)}{(k+1)p_k+2m-3-2\varepsilon-2k}$, en sorte que $p_1 = \frac{2n}{n+3+2\varepsilon-2m}$. On vérifie ensuite par récurrence que $p_k > 2$ et que $p_k \leqslant \frac{2n}{n+2k+1+2\varepsilon-2m}$ $k=0,\ldots,m-1$.
En effet, on voit facilement que $p_{k+1} \leqslant \frac{2n}{n+2k+3+2\varepsilon-2m}$ équivaut, si $n>2m-1-2\varepsilon$, à $p_k \leqslant \frac{2n}{n-2m+1+2\varepsilon}$.

Dans le cas des basses dimensions ($n\leqslant 2m-2$), on prend p_0 arbitraire (tendant vers $+\infty$). Puis $p_1 = 2(m-\frac{1}{2}-2\varepsilon)$ (on vérifie que c'est toujours compatible avec (1.12), (1.13)), et

$$p_{k+1} = \frac{2p_k(m-\frac{1}{2}-\varepsilon)}{(K+1)p_k+2m-3-2\varepsilon-2k} \qquad k\geqslant 1 .$$

On a donc montré

$$(1.24)\qquad \tau^{\varepsilon}\Big\{\|u\, e^{\tau\phi}\|_{o,p_o} + \sum_{|\alpha|=1}\|(D^\alpha u)e^{\tau\phi}\|_{o,p_1} + \ldots + \sum_{|\alpha|=m-1}\|(D^\alpha u)e^{\tau\phi}\|_{o,p_{m-1}}\Big\} + \sum_{|\alpha|<m}\tau^{m-|\alpha|-\frac{1}{2}}\|(D^\alpha u)e^{\tau\phi}\|_{o,2}$$
$$\leqslant K\,\|P_m(x,D)u\, e^{\tau\phi}\|_{o,2} \quad \forall\, u\in\mathcal{D}(\Omega)\ ,\ \forall\ \tau \text{ assez grand}$$

i.e., (1.1) pour $P = P_m$.

b) Fin de la preuve de la Proposition 1 :
On remplace dans (1.24) $P_m u$ par

$$Pu - \sum_{|\alpha|=o}^{m-1} a^\alpha D^\alpha u .$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a si $a^\alpha \in L^{\frac{2p_{|\alpha|}}{p_{|\alpha|}-2}}$

$$\|a^\alpha(D^\alpha u)e^{\tau\phi}\|_{o,2} \leqslant \|a^\alpha\|_{o,\frac{2p_{|\alpha|}}{p_{|\alpha|}-2}}\ \|(D^\alpha u)e^{\tau\phi}\|_{o,p_{|\alpha|}} .$$

Compte tenu de (1.24) on déduit alors (1.1), pour τ assez grand.

Il reste à expliciter la condition sur $\frac{2p_k}{p_k-2} = q_k$.

On trouve d'abord $q_o = \frac{2n}{2m-1-4\varepsilon}$ pour $n \geq 2m-1$, puis il vient facilement

$$\frac{2p_{k+1}}{p_{k+1}-2} = \frac{2p_k}{p_k-2} \frac{(2m-1-2\varepsilon)}{(2m-3-2k-2\varepsilon)} \quad , \quad \text{en sorte que}$$

$$q_{k+1} = \frac{2n(2m-1-2\varepsilon)^k}{\prod_{j=o}^{k} (2m-3-2j-2\varepsilon)} \quad , \quad 0 \leq k \leq m-2 \ .$$

Dans le cas des basses dimensions $(n \leq 2m-2)$, on trouve

$$q_o = 2+\varepsilon \quad , \qquad q_1 = \frac{2(m-\frac{1}{2}-2\varepsilon)}{m-\frac{3}{2}-2\varepsilon}$$

$$q_{k+1} = \frac{(2m-1-4\varepsilon)}{(m-\frac{3}{2}-2\varepsilon)} \quad \frac{(2m-1-2\varepsilon)^k}{\prod_{j=1}^{k} (2m-3-2j-2\varepsilon)} \qquad 1 \leq k \leq m-2$$

La Proposition 1 est ainsi démontrée.

Fin de la preuve du Théorème 1 :

On obtient d'abord à partir de (1.1), de façon similaire à Hörmander (cf. [12] p.224), l'unicité du problème de Cauchy : si $u \in H^m_{loc}(\Omega)$ satisfait $P(x,D)u = 0$ et si $u = 0$ dans $\{x \in \Omega, \phi(x) > \phi(x_o)\} \cap U$ (U voisinage de x_o), alors u est nulle dans un voisinage de x_o .

Pour en déduire que P vérifie (P.U.) on peut raisonner par réflexion, comme dans Nirenberg ([17]) :

Soit Ω_o le plus grand ouvert de Ω dans lequel u est nulle

presque partout ; Ω_0 est non vide par hypothèse. On suppose que $\Omega_0 \neq \Omega$, sinon il n'y a rien à démontrer. Il existe alors une boule ouverte B contenue dans Ω_0 dont le bord ∂B contient un point x_0 de $\partial\Omega_0$ qui appartient aussi à Ω. On peut évidemment supposer que le centre de B est l'origine O . De plus, quitte à prendre une boule de rayon plus petit, on peut supposer que ∂B est strictement pseudo-convexe en x_0 (voir Hörmander [12]). Considérons alors l'inversion définie par $y(x) = \frac{rx}{\|x\|^2}$ où r = rayon de B , et posons $u(x) = v(y)$. Alors v vérifie une équation $Qv = 0$, les coefficients de Q ayant la même régularité que ceux de P . D'après l'unicité de Cauchy (prenant comme ϕ la fonction quadratique définissant le bord de B), il suit que v est nulle dans un voisinage de x_0, et donc que u est nulle dans un voisinage de x_0 , contredisant la maximalité de Ω_0 . ∎

Le résultat fourni par le Théorème 1 est légèrement moins bon pour les basses dimensions ($n \leq 2m-2$). Ceci est dû au fait que en estimant dans (1.1) (écrite pour $P = P_m$) , $Pu\, e^{\tau\phi}$ dans L^2 , on ne peut obtenir au mieux que des coefficients dans $L^{2+\varepsilon}$.

Dans le cas où P_m est à <u>coefficients constants</u>, on peut obtenir une inégalité de Carleman où le membre de droite de (1.1) est estimé dans L^r , $1<r<2$. Ceci nous permet alors de traiter le cas d'une perturbation d'ordre 0 de P_m et d'obtenir le :

Théorème 2 : *On suppose que les* a_α *sont constants* ($|\alpha|=m$) *et que* $a_o \in L^{\frac{2n}{(2m-1)}+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ *si* $2n \geq 2m-1$

$a_o \in L^{1+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ *si* $2n \leq 2m-1$.

Soit $u \in W^{2,q}_{loc}(\Omega)$ *où* $q \geq Max\ (1+\varepsilon, \frac{2n}{n+2m-1-2\varepsilon})$ *solution de* $P(x,D)u = P_m(D)u + a_o u = 0$.

Alors si u est nulle p.p. sur ouvert non vide de Ω , *u est nulle presque partout dans* Ω .

Preuve du Théorème 2 :

Elle suit de très près celle du Théorème 1. Nous n'en indiquons que les modifications essentielles. On montre d'abord la

Proposition 2. *(Les notations sont celles du Théorème 2).* *Soit* $\phi \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ *telle que* $grad\ \phi(x) \neq 0$ *pour* $x \in \Omega$ *et vérifiant la condition de pseudo-convexité forte d'Hörmander* ([12] p.190). *Soit* $\varepsilon > 0$; *alors pour* p_o *et* q *vérifiant* $1<q<2<p$ *et* $\frac{p_o q}{p_o - q} = \frac{2n}{2m-1-2\varepsilon}$ *si* $2n \geq 2m-1$ (*resp.* $\frac{p_o q}{p_o - q} = 1 + \varepsilon$ *si* $2n<2m-1$), *il existe* $K>0$ *tel que*

$$\tau^\varepsilon \|u\, e^{\tau\phi}\|_{o,p_o} \leq K \|P(D)u.e^{\tau\phi}\|_{o,q}\ ,\quad \forall\ u \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.26}$$
$$\forall\ \tau \text{ assez grand}\ .$$

Preuve :

Là encore, la preuve suit celle de la Proposition 1. Outre les nombres p_o, s_o vérifiant (1.6), (1.7), introduisons un réel q tel que $1<q<2$ et un réel m' tel que

$$m' \leq -n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)\ , \tag{1.27}$$

en sorte que d'après le théorème de plongement de Sobolev, on a

$$(1+|D|^2)^{\frac{m'}{2}} : L^q(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \text{ continûment.} \tag{1.28}$$

Utilisant (1.28) on transforme l'inégalité (1.10) en :

$$\tau^\varepsilon \|v\|_{o,p_o} \leq K \|(1+|D|^2)^{-\frac{m'}{2}} P_\tau(D) (1+|D|^2)^{-\frac{s_o}{2} - \frac{1}{2}(m-\frac{1}{2}-\varepsilon)} v\|_{o,q}\ . \tag{1.29}$$

En localisant de façon similaire à Hörmander ([12] p.191) on peut supposer que ϕ est linéaire : $\phi(x) = \langle x, N\rangle$.
On vérifie alors facilement que l'opérateur $P_\tau(D)$ $(= e^{\tau\phi} P(D) e^{-\tau\phi})$ est à coefficients constants, en sorte qu'il commute avec les

opérateurs du type $(1+|D|^2)^{\beta}$. On obtient alors à partir de (1.29) :

$$(1.30)\quad \tau^{\varepsilon}\|v\|_{o,p_o} \leqslant K\|(1+|D|^2)^{-\frac{m'}{2}-\frac{s_o}{2}-\frac{1}{2}(m-\frac{1}{2}-\varepsilon)} P_\tau(D)v\|_{o,q} .$$

Prenant maintenant

$$(1.31)\quad s_o + m' = -(m - \tfrac{1}{2} - \varepsilon) \text{ , on obtient}$$

$$(1.32)\quad \tau^{\varepsilon}\|v\|_{o,p_o} \leqslant K\|P_\tau(D)v\|_{o,q} ,$$

d'où en revenant à $v = u\, e^{\tau\phi}$

$$(1.33)\quad \tau^{\varepsilon}\|u\, e^{\tau\phi}\|_{o,p_o} \leqslant K\|P_m(D)u.e^{\tau\phi}\|_{o,q} .$$

Supposons d'abord $2n \geqslant 2m-1$. Choisissons $s_o = -n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_o})$, $m' = -n(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})$; on en déduit avec (1.31) que $\frac{p_o q}{p_o - q} = \frac{2n}{2m-1-2\varepsilon}$.

Cette condition et $p_o > 2$ imposent $q > \frac{2n}{n+2m-1-2\varepsilon}$.

Si $2n < 2m-1$, on choisit p_o et q tels que $\frac{p_o q}{p_o - q} = 1 + \varepsilon$ puis s_o et m' de façon que (1.7) et (1.27) aient lieu ; ce choix est possible et compatible avec (1.31).
En effet (1.7), (1.27) et (1.31) impliquent $m - \frac{1}{2} - \varepsilon \geqslant n(\frac{p_o - q}{p_o q}) = \frac{n}{1+\varepsilon}$.

Si on prend en particulier $q = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ on trouve $p = \frac{2(1+\varepsilon)(1+\varepsilon/2)}{\varepsilon}$.

En remplaçant maintenant dans (1.33) $P_m(D)u$ par $P(D).u - a_o u$ et en utilisant l'inégalité de Hölder, on en déduit (1.26).

■

La fin de la démonstration du Théorème 2 est alors similaire à celle du Théorème 1.

Remarque 1. Le Théorème 2 est encore valable pour $P(x,D) = P_m(D) + \sum_{|\alpha|=1}^{m-1} a_\alpha(x)D^\alpha + a_o(x)u$, P_m et a_o vérifiant les hypothèses du Théorème 2 et les a_α $(1 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1)$ appartenant à $L^\infty_{loc}(\Omega)$.

2. Le cas des opérateurs elliptiques à caractéristiques complexes multiples.

La situation est nettement moins agréable que dans le cas des opérateurs à caractéristiques simples. Il existe par exemple (Cohen [6]) un opérateur dont la partie principale est Δ^3 et pour lequel la propriété (P.U.) n'a pas lieu. On connaît cependant des résultats de prolongement unique quand les caractéristiques sont de multiplicité $r\geqslant 2$, mais tous les termes d'ordre inférieur ne sont pas permis en général (cf. [15], [18], [19], [13], [8], [28], [27]).

En particulier, Sussman [27] reprenant des méthodes de Pederson [19], Watanabe [28], traite assez complètement le cas $r\leqslant 3$.

Nous nous proposons comme dans le paragraphe 1 d'affaiblir les hypothèses sur les coefficients. Contrairement au cas $r=1$ ce ne sera pas possible pour tous les coefficients non principaux ; pour $r=3$ le contre-exemple de Cohen montre en effet que les coefficients sous-principaux doivent être localement lipschitziens.

Les techniques sont celles du paragraphe 1 et nous n'indiquerons que les modifications essentielles, principalement les estimations de Carleman pour l'opérateur non perturbé. Nous traitons successivement le cas $r=2$, $r=3$ (l'opérateur non perturbé étant à coefficients variables) et $r>3$ (l'opérateur non perturbé étant à coefficients constants).

Comme dans le paragraphe précédent, nous introduisons d'abord quelques notations.

Soient $\varepsilon>0$, m entier pair $\geqslant 4$ (ordre de l'opérateur), et r entier $\leqslant \frac{m}{2}$ (multiplicité). On définit deux suites de réels p_k, q_k, $0\leqslant k\leqslant m-1$ comme suit

i) si $n\geqslant 2m-r$, on pose $p_0 = \dfrac{2n}{n+r+2\varepsilon-2m}$

et $p_{k+1} = \dfrac{2p_k(m-\frac{r}{2}-\varepsilon)}{(k+1)p_k+2m-r-2\varepsilon-2k-2}$ $\qquad k=0,1,\ldots,m-1$

$$q_o = \frac{2n}{2m-r-2\varepsilon} \quad , \quad q_{k+1} = \frac{2n(2m-r-2\varepsilon)^k}{\prod_{j=o}^{k} (2m-2r-1-2j-2\varepsilon)} \quad , \qquad o \leqslant k \leqslant m-2 \ ;$$

ii) si $n \leqslant 2m-r-1$, on prend p_o arbitraire (tendant vers $+\infty$), $p_1 = 2(m-\frac{r}{2}-2\varepsilon)$,

$$p_{k+1} = \frac{2p_k(m-\frac{r}{2}-\varepsilon)}{(k+1)p_k+2m-r-2\varepsilon-2k-2} \qquad 1 \leqslant k \leqslant m-2$$

$$q_o = 2 + \varepsilon \ , \qquad q_1 = \frac{4(m-\frac{r}{2}-2\varepsilon)}{2m-2r-1-4\varepsilon}$$

$$q_{k+1} = \frac{(2m-r-4\varepsilon)}{(m-r-\frac{1}{2}-2\varepsilon)} \ \frac{(2m-r-2\varepsilon)^k}{\prod_{j=1}^{k} (2m-2r-1-2j-2\varepsilon)} \qquad 1 \leqslant k \leqslant m-2 \ .$$

a) Le cas $r=2$ (partie principale à coefficients variables).

On suppose ici que $P_m(x,D)$ est un opérateur uniformément elliptique homogène d'ordre $m \geqslant 4$ avec

$$(2.1) \qquad P_m(x,D) = P_{m_1}(x,D)\, P_{m_2}(x,D) \ , \quad \text{où}$$

$m = m_1 + m_2$, les opérateurs P_{m_i} $i=1,2$ étant uniformément elliptiques, homogènes d'ordre m_i et à caractéristiques complexes simples.

On suppose que les coefficients de P_{m_1} sont lipschitziens et ceux de P_{m_2} sont C^1 (voir [13] p.189).

On a alors le

Théorème 3. *Soit* $P(x,D) = P_m(x,D) + \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} a_\alpha(x) D^\alpha$. *On suppose*

| *que* $a_\alpha \in L^{q_k}_{loc}(\Omega)$ $\quad |\alpha|=k \quad 0\leqslant k\leqslant m-1$ (1)
| *Alors* P *vérifie* (P.U.).

Démonstration : C'est celle du Théorème 1, à partir de l'inégalité de Carleman obtenue par Hörmander ([13] Theorem 4.2).

∎

Remarque 2. Le Théorème 3 s'applique à des linéarisations "peu régulières" des équations de Von Karman :

$$(2.2) \qquad \begin{cases} a\Delta^2 u - [u,v] = f & \text{dans un ouvert } \Omega \text{ de } \mathbb{R}^2 \\ b\Delta^2 v + [u,u] = 0 \end{cases}$$

où $[u,v] = u_{xx}\, v_{yy} + u_{yy}\, v_{xx} - 2u_{xy}\, v_{xy}$.

En effet si on linéarise (2.2) autour d'une solution $(u_0,v_0) \in H^3(\Omega)^2$, on obtient un opérateur de la forme

$$a\Delta^2 u + P_2(u,v)$$
$$b\Delta^2 v + Q_2(u,v)$$

, les opérateurs P_2 , Q_2 étant homogènes d'ordre 2, à coefficients dans $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ $\forall$ p $2\leqslant p<\infty$ d'après le théorème de Sobolev.

b) Le cas r=3 (partie principale à coefficients variables).

Soit $A(x,D)$ un opérateur elliptique homogène d'ordre m , à coefficients dans $C^{2m+1}(\bar{\Omega})$ à caractéristiques complexes simples, et $B(x,D)$ un opérateur différentiel homogène d'ordre $3m-1$, à coefficients localement lipschitziens.

On pose $\quad P(x,D) = A(x,D)^3 + B(x,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant 3m-2} a_\alpha(x)\, D^\alpha .$

On a alors le

---

(1) On prend bien sûr r=2 dans la définition des q_k, p_k .

Théorème 4. | *On suppose que* $a_\alpha \in L^{q_k}_{loc}(\Omega)$, $|\alpha|=k$, $0 \leqslant k \leqslant 3m-2$. *(1)*
Alors P *vérifie (P.U.).*

Démonstration : On part de l'inégalité de Carleman établie par Watanabe ([28], Theorem 5).

∎

Remarque 3. En utilisant les estimations de Sussman [27] on peut traiter des parties principales plus générales que $A(x,D)^3$.

(c) Le cas $r>3$ (partie principale à coefficients constants).

Soit $P_m(D)$ un opérateur elliptique homogène d'ordre m , à coefficients constants, à caractéristiques complexes multiples d'ordre r .
Soit $Q(x,D)$ un opérateur différentiel homogène d'ordre $m - \left[\frac{r+1}{2}\right] + 1$ à coefficients localement lipschitziens.

On pose $P(x,D) = P_m(D) + Q(x,D) + \sum_{|\alpha| \leqslant m - \left[\frac{r+1}{2}\right]} a_\alpha(x)\, D^\alpha$

Théorème 5. | *Si* $a_\alpha \in L^{q_k}_{loc}(\Omega)$, $|\alpha|=k$, $0 \leqslant k \leqslant m - \left[\frac{r+1}{2}\right]$ *alors*
$P(x,D)$ *vérifie (P.U.)* .

Démonstration : On part de l'estimation de Watanabe ([28], Theorem 4).

∎

Remarque 4 : Nous laissons au lecteur le soin d'écrire, dans le cas où la partie principale de P est à coefficients constants, des résultats correspondants au Théorème 2 et à la Remarque 1.

Remarque 5 : Les résultats obtenus dans les paragraphes 1 et 2 nous paraissent optimaux en suivant notre méthode : dérivation d'inégalités

---

(1) $r=3$ dans les formules définissant p_k, q_k .

de Carleman L^p à partir d'inégalité L^2 . Ce ne sont pourtant probablement pas les meilleurs résultats de prolongement unique pour des équations elliptiques à coefficients non localement bornés. Dans le cas par exemple où $m=2$ (équations du 2ème ordre), le "bon" résultat devrait être $a_o \in L^{(n/2)+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$, $a_1 \in L^{n+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$, alors que nous obtenons $a_o \in L^{(2n/3)+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$, $a_1 \in L^{2n+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$. Cette conjecture est confortée par le résultat d'A.M. Berthier qui montre (P.U.) pour l'opérateur de Schrödinger $-\Delta+V$ dans $\mathbb{R}^3$ où $V \in L^{3/2+\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ [4] (Pour Schrödinger dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 5$, $V \in L^{(2n/3)+\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est le meilleur résultat connu). L'obtention directe d'inégalités de Carleman en norme L^p pour la partie principale (par des méthodes d'analyse harmonique) devrait permettre d'améliorer nos résultats.

3. Une application : un théorème de généricité.

Les résultats du type prolongement unique sont un outil essentiel pour démontrer des théorèmes de généricité par des méthodes de transversalité (cf. [24], [25]). Les résultats de ce travail permettent d'affaiblir certaines hypothèses de régularité. Voici un exemple simple.

Dans [25], on établit un théorème de finitude générique (par rapport aux coefficients (a_{ij})) de l'ensemble des solutions d'une équation quasi-linéaire du type :

$$(3.1) \quad \begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i x_j} + g(x,u,\nabla u) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u_{|\Gamma} = 0 \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ de classe $C^{2,\alpha}$, $0<\alpha<1$.

Dans [25] on doit prendre les coefficients a_{ij} dans $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour appliquer la version "coefficients bornés" du théorème de prolongement. Le Théorème 1 permet d'affaiblir cette hypothèse en supposant seulement l'appartenance des a_{ij} à $W^{2,p}(\Omega)$.

Rappelons d'abord les hypothèses sur g qui assurent l'existence d'au moins une solution au problème (3.1) (dans la classe $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$) :

(G)

(G.1) g est continue sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, à valeurs réelles ; $g \in C^{\alpha}(K)$ pour tout compact $K \subset \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

(G.2) $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial p_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont dans $C^{\alpha}(K)$ pour tout compact K de $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

(G.3) $\exists\ b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 > 0$, $b_2 \geqslant 0$ tels que

$$g(x,u,0)u \leqslant -b_1 u^2 + B_2 \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

(G.4) $\exists\ \mu_2 > 0$ tel que si $x \in \bar{\Omega}$, $|u| \leqslant M = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}$ et $p \in \mathbb{R}^n$, alors

$$|g(x,u,p)| \leqslant \mu_2(1+|p|^2) .$$

Théorème 6. *Soit $p>n$ et $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$. Soit g vérifiant (G). Il existe alors un ouvert dense $\mathcal{O}$ de $V = \{a = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $a_{ij} \in W^{2,p}(\Omega)$, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \geqslant \mu_o \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, $\forall x \in \bar{\Omega}$, $\forall\ \xi \in \mathbb{R}^n$, $\mu_o = \mu_o(a) > 0\}$ tel que pour $a \in \mathcal{O}$, le problème (3.1) possède un nombre fini de solutions.*

Le nombre de solutions est constant sur chaque composante connexe de $\mathcal{O}$, et sur une telle composante, chaque solution est une fonction continûment différentiable des a_{ij}.

Démonstration : La preuve est basée sur des techniques de transversalité et suit exactement celle du Théorème 2.1 dans [25]. On est conduit à une propriété de prolongement unique pour un opérateur elliptique du 2ème ordre dont les coefficients principaux sont dans $W^{2,p}(\Omega)$ (donc dans $C^1(\bar{\Omega})$ puisque $p>n$) et les coefficients non principaux dans $L^p(\Omega)$, $p>n$, et on peut appliquer le Théorème 1.

Références

[1] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG :
Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II.
Comm. Pure Appl. Math. 17, p.35-92 (1964).

[2] W.O. AMREIN, A.M. BERTHIER, V. GEORGESCU :
An L^p inequality for the laplacian and unique continuation.
(à paraître).

[3] N. ARONSZAJN :
A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order.
J. Math. Pures Appl. 36, p.235-249 (1957).

[4] A.M. BERTHIER :
Sur le spectre ponctuel de l'opérateur de Schrödinger.
C.R. Acad. Sc. Paris, t.290 série 17 p.393-395 (1980).

[5] T. CARLEMAN :
Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes.
Ark. Mat. Astr. Fys. 26 B, n°17, p.1-9 (1939).

[6] P. COHEN :
The non-uniqueness of the Cauchy problem.
Office of Naval Research Techn. Report 93, Stanford (1960).

[7] V. GEORGESCU :
A paraître à Helv. Phys. Acta.

[8] P.M. GOORJIAN :
The uniqueness of the Cauchy problem for partial differential equations which may have multiple characteristics.
Trans. A.M.S. 146, p.493-509 (1969).

[9] G. GRUBB :
Boundary problems for systems of partial differential operators of mixed order.
J. Funct. Anal. 26, p.131-165 (1977).

[10] G. GRUBB, G. GEYMONAT :
The essential spectrum of elliptic systems of mixed order.
Math. Ann. 227, p.247-276 (1977).

[11] E. HEINZ :
Uber die Eindentigkeit beim Cauchyschen Anfangswertproblem einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung.
Nachr. Akad. Wis. Göttingen Math. Phys., Kl IIa, N°1, p.1-12 (1955)

[12] L. HÖRMANDER :
Linear partial differential operators.
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1969.

[13] L. HÖRMANDER :
On the uniqueness of the Cauchy problem II.
Math. Scand. 7, p.177-190 (1955).

[14] L. HÖRMANDER :
Pseudo-differential operators and non elliptic boundary problems.
Ann. of Math. 83, p.129-209 (1966).

[15] S. MIZOHATA :
Unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques du quatrième ordre.
Proc. Jap. Acad. 34, p.687-692 (1958).

[16] C. MÜLLER :
On the behaviour of the solutions of the differential equation $\Delta u = F(x,u)$ in the neighbourhood of a point.
Comm. Pure Appl. Math.7, p.505-515 (1954).

[17] L. NIRENBERG :
Uniqueness in Cauchy problems for differential equations with constant leading coefficients.
Comm. Pure Appl. Math. 10, p.89-105 (1957).

[18] R. PEDERSON :
On the unique continuation theorem for certain second and fourth order elliptic equations.
Comm. Pure Appl. Math. 11, p.67-80 (1958).

[19] R. PEDERSON :
Uniqueness in Cauchy's problem for elliptic equations with double characteristics.
Arkiv für Mat. 6, p.535-549 (1966).

[20] A. PLIS :
A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere.
Comm. Pure Appl. Math. 14, p.599-617 (1968).

[21] A. PLIS :
On non-uniqueness in Cauchy problem for an elliptic second order differential equation.
Bull. Acad. Pol. Sci. Série Sciences Math. Astr. et Phys. Vol XI, n°3, p.95-100 (1963).

[22] M. REED, B. SIMON :
Methods of Modern Mathematical Physics, IV, Analysis of operators.
Academic Press, New York 1978.

[23] J.C. SAUT, B. SCHEURER :
Un théorème de prolongement unique pour des opérateurs elliptiques dont les coefficients ne sont pas localement bornés.
C.R. Acad. Sc. Paris t.290, Série A, p.595-598 (1980).

[24] J.C. SAUT, R. TEMAM :
Generic properties of Navier-Stokes equations : genericity with respect to the boundary values.
Indiana J. Math. (1980).

[25] J.C. SAUT, R. TEMAM :
Generic properties of nonlinear boundary value problem.
Comm. in P.D.E. 4, n°3, p.293-319 (1979).

[26] M. SCHECHTER, B. SIMON :
Unique continuation for Schrödinger operators with unbounded potentials.
A paraître au J. Math. Anal. Appl.

[27] M.M. SUSSMAN :
On uniqueness in Cauchy's problem for elliptic partial differential operators with characteristics of multiplicity greater than two.
Tôhoku Math. J. 29, p.165-188 (1977).

[28] K. WATANABE :
On the uniqueness of the Cauchy problem for certain elliptic equations with triple characteristics.
Tôhoku Math. J. 23, p.473-490, (1971).

SUR UNE PERTURBATION SINGULIERE D'OPERATEUPS DIFFERENTIELS ELLIPTIQUE-HYPERBOLIQUE

B.SCHEURER

Analyse Numérique et Fonctionnelle
CNRS et Université Paris-Sud
Bâtiment 425
91405 - Orsay (France)

PLAN

§.0 Introduction

§.1 Opérateurs différentiels d'ordre 2 à coefficients réels et caractéristiques simples.

1.1. Inégalité d'énergie avec poids

1.2. Inégalité de Carleman

1.3. Estimation, existence et unicité dans les espaces de Sobolev H^s .

1.4. Exemples.

§.2 Perturbation singulière de certains opérateurs différentiels d'ordre 2 à coefficients réels et caractéristiques simples.

2.1. Une classe d'opérateurs elliptique-hyperbolique

2.2. Perturbation d'opérateurs elliptique-hyperbolique et inégalité d'énergie avec poids

2.3. Perturbation d'opérateurs elliptique-hyperbolique et inégalité de Carleman (I)

2.4. Perturbation d'opérateurs elliptique-hyperbolique et inégalité de Carleman (II).

§.3 Estimations, existence et approximation dans $H^{m,s}$.

3.1. Estimation dans $H^{m,s}$ pour une perturbation d'opérateur elliptique-hyperbolique (I)

3.2. Estimation dans $H^{m,s}$ pour une perturbation d'opérateur elliptique-hyperbolique (II)

3.3. Existence et approximation dans $H^{m,s}$.

§.4 Résumé des résultats

§.0 INTRODUCTION

Cette étude a pour objet une perturbation singulière de l'équation de Tricomi :

$$(0.1) \qquad (x_2 D_1^2 + D_2^2)u = f$$

où $x = (x_1, x_2)$ décrit un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ contenant l'axe $x_2 = 0$. Pour des conditions aux limites convenables, la solution de cette équation représente, au voisinage de la ligne de choc, un écoulement transsonique (supposé plan et stationnaire, isentropique [9]). La résolution numérique de cette équation, à l'aide d'une méthode de différences finies, a été notamment étudiée par Murman et Cole [12], Jameson [8]. Afin d'obtenir une solution numérique stable, ces auteurs proposent l'utilisation d'un schéma aux différences d'un type particulier. Dans l'équation (0.1) le terme D_2^2 est discrétisé de façon centrée, mais le terme D_1^2 l'est de façon centrée ou décentrée selon que x_2 soit positif ou négatif. Ceci afin de tenir compte du caractère hyperbolique, lorsque $x_2<0$, de l'opérateur $x_2 D_1^2 + D_2^2$. Le principe de ce schéma est appliqué, toujours dans [12] et [8], à l'équation générale (non linéaire) du potentiel des vitesses pour un écoulement transsonique plan (voir [9]). Ce "décentrage sélectif" s'interprète comme une perturbation d'ordre 4 de l'équation (0.1) :

$$(0.2) \qquad (x_2 D_1^2 + D_2^2)u + \nu\, d(x_2)(D_1^4 + \ldots)u = f$$

où $d(x_2) = 0$ si $x_2 \geq 0$, $d(x_2) = x_2$ si $x_2 < 0$ et ν est un paramètre positif petit. Il suggère la régularisation "parabolique" suivante de (0.1) :

$$(0.3) \qquad (x_2 D_1^2 + D_2^2)u + \nu\, d(x_2)(D_1^4 + 2iD_1^2 D_2)u = f$$

qui a donc lieu seulement lorsque $x_2 < 0$. Le procédé de régularisation parabolique est bien connu en mécanique des fluides sous le nom de méthode de viscosité artificielle, ν désignant alors le paramètre de viscosité. Replacé dans un cadre fonctionnel général, il apparaît dans Lions [10], comme exemple de problème de perturbation singulière. Récemment, plusieurs auteurs, notamment Morawetz [17], Majda et Osher [18] Osher [19], ont étudié sous cet aspect différents modèles d'écoulements transsoniques plans et stationnaires. Morawetz étudie en particulier l'équation :

$$(0.4) \qquad D_1(\text{signe}(iD_1 u)D_1 u) + D_2^2 u + i\nu\, D_1(D_1^2 + D_2^2)u = 0$$

Lorsque $\nu = 0$, (0.4) est une généralisation non linéaire du modèle de Lavrentiev-Bitsadze [1]. Majda et Osher étudient principalement l'influence du décentrage, en liaison avec la condition d'entropie, dans les lois de conservation hyperboliques :

$$(0.5) \qquad u_t + f(u)_x = 0 \ .$$

A notre connaissance, l'étude de l'équation (0.3) et plus généralement d'un problème de perturbation singulière pour un opérateur elliptique-hyperbolique (l'opérateur de Tricomi) est nouvelle. Elle suppose une bonne connaissance des propriétés de l'opérateur de Tricomi. A ce sujet, citons particulièrement les travaux de Tricomi [15], Bitsadze [1], Germain-Bader [4], Friedrichs [3], Morawetz [11]. Il nous a

semblé, cependant, que les méthodes développées par Hörmander [5], [6], [7] étaient particulièrement adaptées dans le contexte présent et nous en ferons ici un large usage. Il apparait alors, dans ce cadre, une propriété de pseudo-convexité qui caractérise naturellement les opérateurs elliptique-hyperbolique. Ceci permet d'envisager une classe assez large d'opérateurs, indépendante du choix des coordonnées, qui généralise en dimension d'espace et en structure celui de Tricomi. Plus précisément, nous considérons des opérateurs différentiels d'ordre 2 à coefficients réels et de classe C^1 dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$; nous définissons de façon invariante des opérateurs elliptique-hyperbolique changeant de type à travers une hypersurface non caractéristique et convexe dans la direction des bicaractéristiques tangentes. A cette classe est associée une généralisation de la perturbation introduite en (0.3). Notre approche consiste alors à obtenir successivement pour l'opérateur limite, puis pour l'opérateur perturbé des inégalités a priori en norme L^2 avec poids $\exp \tau\phi$; τ est un paramètre réel et ϕ une fonction réelle régulière à définir.

Ces inégalités, dites inégalités de Carleman, ont ici plusieurs qualités : elles dépendent seulement des propriétés de la partie principale des opérateurs considérés, elles sont locales. Elles permettent surtout l'obtention de résultats d'existence et de régularité, d'unicité. En particulier, sera précisé par ce biais comment (0.3) approxime (0.1) lorsque $\nu \longrightarrow 0$.

Précisons que dans cette étude, toutes les fonctions seront à support compact ; c'est-à-dire que nous n'envisageons pas le problème aux limites associé aux perturbations singulières ci-dessus (Le problème aux limites sera traité dans un autre travail).

Le plan est le suivant. Au paragraphe 1, nous démontrons une inégalité de Carleman pour les opérateurs différentiels d'ordre 2 à coefficients réels et caractéristiques simples. Ce résultat est tout à fait classique (voir Hörmander [5]), mais la première partie de la démonstration, basée sur un argument de commutation, sera

reprise et développée aux paragraphes 2,3. De cette inégalité, nous déduisons classiquement des résultats d'existence dans les espaces de Sobolev H^s , d'unicité.

Les paragraphes 2 et 3 constituent l'essentiel de notre travail. Nous caractérisons tout d'abord une classe d'opérateurs elliptique-hyperbolique, invariante par changement de coordonnées. Nous définissons ensuite la régularisation parabolique des opérateurs de cette classe, en distinguant deux cas selon la régularité en la variable x_n de la perturbation introduite. Le premier cas correspond à (0.3), où la fonction $x_2 \longrightarrow d(x_2)$ est seulement continue sur $\mathbb{R}$. Le deuxième cas correspond à une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle lorsque $x_2>0$, donc plate en $x_2=0$. Les résultats principaux du paragraphe 2 sont alors deux inégalités de Carleman pour l'opérateur perturbé. Leurs démonstrations sont nécessairement longues et techniques en raison du caractère inhabituel des perturbations introduites. Au paragraphe 3, à partir de ces inégalités de Carleman, nous démontrons deux estimations dans les espaces $H^{m,s}$ ([5]). Nous procédons pour cela par régularisation par convolution en tenant compte du comportement en $x_n=0$ des perturbations. Ces estimations sont essentielles : par dualité et grâce à l'hypoellipticité partielle des opérateurs considérés, nous en déduisons des résultats d'existence et en même temps des majorations a priori indépendantes du paramètre ν . Nous terminons en précisant en quel sens le problème perturbé approxime, pour $\nu \longrightarrow 0$, le problème limite. Enfin le paragraphe 4 se veut un résumé des résultats obtenus au cours des paragraphes 2, 3 et 4 Après avoir rappelé les exemples du paragraphe 1.4, nous décrivons succintement les résultats correspondants avec les renvois au texte convenables.

Je remercie tout particulièrement R. Temam qui m'a suggéré cette étude et m'a encouragé à la mener à bien, ainsi que J. Sjöstrand qui a bien voulu lire une première version de ce travail et y apporter de nombreuses remarques.

I - OPERATEURS DIFFERENTIELS D'ORDRE 2

A COEFFICIENTS REELS ET CARACTERISTIQUES SIMPLES

Soit $P(x,D)$ un opérateur différentiel d'ordre 2, dont la partie principale $P_2(x,D)$ (polynôme homogène de degré 2 en D) sera à coefficients réels et de classe C^1 dans l'adhérence $\overline{\Omega}$ d'un ouvert borné de R^n. Les autres coefficients seront mesurables et bornés dans $\overline{\Omega}$.

Le symbole principal $p_2(x,\xi)$ de $P(x,D)$ (symbole de $P_2(x,D)$) satisfaira dans tout ce paragraphe :

$$(1.1)\quad dp_2(x,\xi) \neq 0 \quad \text{lorsque} \quad (x,\xi) \in \overline{\Omega} \times (R^n \mid 0) \quad \text{et} \quad p_2(x,\xi) = 0.$$

La classe d'opérateurs définie par (1.1) comprend les opérateurs elliptiques pour lesquels $p_2(x,\xi) \neq 0$. Elle comprend également les opérateurs hyperboliques à caractéristiques simples pour lesquels :

$$(1.2)\quad \sum_1^n \left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} p_2(x,\xi) \right|^2 \neq 0 \quad \text{lorsque} \quad (x,\xi) \in \overline{\Omega} \times (R^n \mid 0) \quad \text{et} \quad p_2(x,\xi) = 0.$$

L'opérateur de Tricomi $x_2 D_1^2 + D_2^2$ est un exemple important d'opérateur satisfaisant (1.1) mais pas (1.2) lorsque $x_2 = \xi_2 = 0$. Si

$Q(x,D)$ est un opérateur différentiel dont le symbole principal $q(x,\xi)$ a des coefficients réels et de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$, l'opérateur $[P,Q] = PQ - QP$ a pour symbole principal $\frac{1}{i}\{p_2,q\}$ où

$$(1.3)\quad \{p_2,q\} = \sum_1^n \frac{\partial}{\partial \xi_j} p_2(x,\xi) \frac{\partial}{\partial x_j} q(x,\xi) - \frac{\partial}{\partial x_j} p_2(x,\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} q(x,\xi)$$

est le crochet de Poisson de p_2 et q. Ce crochet définit un opérateur H_{p_2} du 1er ordre agissant sur q, le champ de vecteur hamiltonien de p_2 :

$$(1.4)\quad H_{p_2} = \sum_1^n \frac{\partial}{\partial \xi_j} p_2(x,\xi) \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} p_2(x,\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j}$$

Puisque $H_{p_2} p_2 = \{p_2,p_2\} = 0$, p_2 est constant sur les courbes intégrales de H_{p_2}. Celles pour lesquelles $p_2 = 0$ sont les bicaractéristiques de p_2. La condition (1.1) exprime qu'elles sont régulières ou réduites à un point.

Enfin, dans ce qui suit, ϕ désignera une fonction réelle de $C^\infty(\overline{\Omega})$ telle que $\operatorname{grad}\phi(x) \neq 0$ dans $\overline{\Omega}$. Les normes L^2 avec poids $\exp \tau\phi$ où $\tau \in \mathbb{R}$ seront constamment utilisées.

1.1. - Inégalités d'énergie avec poids

Il s'agit de minorer la norme L^2 avec poids de $P_2(x,D)$. A cet effet, rappelons le résultat suivant.

Lemme 1.1. *Soit $P(x,D)$ un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients réguliers. Alors, pour $\tau \in \mathbb{R}$:*

$$(1.5)\quad P_\tau(x,D) \equiv \exp \tau\phi\, P(x,D) \exp -\tau\phi = P + \tau\,[\phi,P] + \frac{\tau^2}{2}[\phi,[\phi,P]]$$

Preuve : Celle-ci est classique. Notons d'abord que

$$\frac{d}{d\tau} (\exp \tau\phi \; P \exp - \tau\phi) = \exp \tau\phi \; [\phi,P] \exp - \tau\phi$$

et en itérant :

$$\frac{d^k}{d\tau^k} (\exp \tau\phi \; P \exp - \tau\phi) = \exp \tau\phi \; \underbrace{[\phi,[\ldots \; [\phi,P]]}_{k \text{ crochets}} \exp - \tau\phi$$

Puisque P est d'ordre 2, les dérivées d'ordre $k > 2$ sont nulles et grâce à la formule de Taylor :

$$P_\tau = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\tau^k} (\exp \tau\phi \; P \exp - \tau\phi) = P + \tau \, [\phi, P] + \frac{\tau^2}{2} \, [\phi, [\phi, P]].$$

□

Par un argument de commutation, minorer la norme L^2 avec poids $\exp \tau\phi$ de $P_2 (x,D)$ revient à minorer une forme quadratique dépendant de τ, ϕ et du symbole p_2.

Lemme 1.2. Soit $P_2 (x,D)$ un opérateur différentiel, polynôme homogène de degré 2 en D à coefficients réels et de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$. Soit ϕ une fonction réelle de $C^\infty (\overline{\Omega})$, telle que grad $\phi (x) \neq 0$ dans $\overline{\Omega}$. Alors il existe une constante C telle que l'on ait, quelle que soit $u \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$(1.6) \quad \int |P_2 (x,D) \; u|^2 \exp 2\tau\phi \; dx \geq \tau \int S_\tau (x,D) \; v \cdot \overline{v} \; dx - C \, (||v||_1^2 + \tau^2 \, ||v||_0^2)$$

où $\tau \in \mathbb{R}$, $v = u \exp \tau\phi$ et $S_\tau(x,D)$ est l'opérateur de symbole (d'ordre 2 en ξ et τ) :

$$(1.7)\quad S_\tau(x,\xi) = \{p_2, \{p_2, \phi\}\} + \frac{\tau^2}{2} \{\{p_2,\phi\}, \{\{p_2, \phi\}, \phi\}\}.$$

Preuve : Posons $v = u \exp \tau\phi$ où $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ et écrivons :

$$\int |P_2(x,D)\, u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx = \int |(\exp \tau\phi \, P_2(x,D) \exp -\tau\phi)\, v|^2 \, dx$$

D'après l'identité (1.5) du Lemme (1.1) (où $P = P_2$), on a :

$$P_\tau(x,D) \equiv \exp \tau\phi \, P_2(x,D) \exp -\tau\phi = P_2 + \tau [\phi, P_2] + \frac{\tau^2}{2} [\phi, [\phi, P_2]].$$

Soit $Q_1(x,D)$ l'opérateur différentiel d'ordre 1 de symbole :

$$(1.8)\quad q_1(x,\xi) = \{p_2, \phi\} = \sum_1^n \frac{\partial}{\partial\xi_j} p_2(x,\xi) \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x)$$

Avec cette définition, on vérifie :

$$(1.9)\quad [\phi, P_2] = i\, Q_1(x,D) - P_2(x,D)\, \phi$$

De même, si $Q_0(x)$ désigne l'opérateur de multiplication par :

$$(1.10)\quad q_0(x) = \{\{p_2, \phi\}, \phi\} = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial\xi_j \partial\xi_k} p_2(x,\xi) \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x),$$

on vérifie :

$$(1.11)\quad [\phi, [\phi, P_2]] = -Q_0(x) = -2P_2(x, \operatorname{grad}\phi(x)).$$

Ainsi $P_\tau(x,D)v = P_2(x,D)v + i\tau Q_1(x,D)v - \frac{\tau^2}{2}Q_0(x)v$

$$- \tau P_2(x,D)\phi \cdot v,$$

de sorte que pour $c = \operatorname{Min}_x |P_2(x,D)\phi|^2$:

$$(1.12)\quad \int |P_2(x,D)u|^2 \exp(2\tau\phi)\,dx \geq \frac{1}{2}\int |L_\tau(x,D)v|^2\,dx - c\tau^2\int |v|^2\,dx,$$

après avoir posé par définition :

$$(1.13)\quad L_\tau(x,D) = P_2(x,D) + i\tau Q_1(x,D) - \frac{\tau^2}{2}Q_0(x).$$

Afin de minorer la norme L^2 de $L_\tau(x,D)v$, soit $L_\tau^*(x,D)$ l'opérateur adjoint pour la dualité induite par $\int u\bar{v}\,dx$; puisque v appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$(1.14)\quad \int |L_\tau(x,D)v|^2\,dx \geq \int |L_\tau(x,D)v|^2 - |L_\tau^*(x,D)v|^2\,dx = \int [L_\tau^*(x,D), L_\tau(x,D)]\, v\cdot\bar{v}\,dx.$$

Les coefficients de $P_2(x,D)$ étant réels, il en est de même de ceux de $L_\tau^*(x,D)$ et :

$$(1.15)\quad L_\tau^*(x,D) = P_2(x,D) - i\tau Q_1(x,D) - \frac{\tau^2}{2}Q_0(x) + R_1(x,D) - i\tau R_0(x),$$

où $R_1(x,D) = P_2^*(x,D) - P_2(x,D)$ et $R_0(x) = Q_1^*(x,D) - Q_1(x,D)$.

Grâce à (1.15) et d'après (1.13), il vient :

$$(1.16)\quad [L_\tau^*(x,D), L_\tau(x,D)] = 2\tau\,(i\,[P_2(x,D), Q_1(x,D)] + \frac{\tau^2}{2}\, i\,[Q_1(x,D), Q_0(x)]) + [R_1(x,D) - i\tau R_0(x), L_\tau(x,D)]$$

Maintenant, l'opérateur $i\,[P_2,Q_1] + \frac{\tau^2}{2}\, i\,[Q_1,Q_0]$ a pour symbole principal (défini en un sens convenable) S_τ défini par (1.7) :

$$(1.17)\quad S_\tau(x,\xi) = \{p_2, \{p_2,\phi\}\} + \frac{\tau^2}{2}\,\{\{p_2,\phi\},\{\{p_2,\phi\},\phi\}\}$$

En désignant par $S_\tau(x,D)$ l'opérateur de symbole $S_\tau(x,\xi)$, il existe alors un opérateur $R'_1(x,D)$ d'ordre ≤ 1 tel que :

$$(1.18)\quad i\,[P_2(x,D), Q_1(x,D)] + \frac{\tau^2}{2}\, i\,[Q_1(x,D), Q_0(x)] = S_\tau(x,D) + R'_1(x,D).$$

De même, il existe des opérateurs R''_2, R''_1, R''_0 d'ordre ≤ 2, ≤ 1, 0 tels que (avec (1.13)) :

$$(1.19)\quad [R_1(x,D) - i\tau R_0(x), L_\tau(x,D)] = R''_2(x,D) + \tau R''_1(x,D) + \tau^2 R''_0(x).$$

Pour conclure, d'après (1.16), (1.18), (1.19), nous obtenons l'expression suivante du crochet $[L_\tau^*, L_\tau]$:

$$(1.20)\quad [L_\tau^*(x,D), L_\tau(x,D)] = 2\tau S_\tau(x,D) + R''_2(x,D) + \tau R_1(x,D) + \tau^2 R''_0(x).$$

où $R_1(x,D) = 2R'_1(x,D) + R''_1(x,D)$.

D'après (1.12), (1.14), (1.20), il vient finalement :

$$(1.21)\quad \int |P_2(x,D)\,u|^2 \exp(2\tau\phi)\,dx \geq \tau \int S_\tau(x,D)\,v\cdot\bar{v}\,dx + \frac{1}{2}\int R''_2(x,D)\,v\cdot\bar{v}\,dx + \frac{\tau}{2}\int R_1(x,D)\,v\cdot\bar{v}\,dx + \tau^2 \int R''_0(x)\,|v|^2\,dx - c\,\tau^2 \int |v|^2\,dx.$$

L'inégalité (1.6) cherchée résulte de l'inégalité de Cauchy Schwarz et de la continuité des opérateurs R''_2, R_1, R_0. □

Remarque 1.1. L'argument de commutation ci-dessus sera à nouveau utilisé au § 2 pour démontrer une inégalité similaire à (1.6) mais ou $P_2(x,D)$ est perturbé par certains opérateurs d'ordre 4. □

Remarque 1.2. La conclusion du lemme 1.2 est encore vraie lorsque $P_2(x,D)$ est remplacé par un opérateur $P(x,D)$ de même partie principale et dont les coefficients des termes d'ordres inférieurs sont mesurables et bornés. □

1.2. - Inégalité de Carleman

L'opérateur S_τ, d'ordre 2, n'est pas nécessairement elliptique de sorte que l'inégalité de Gårding ne s'applique pas. Par contre, pour une large classe de fonctions ϕ, une perturbation convenable de S_τ est elliptique. Cette classe est définie compte tenu de la remarque suivante énoncée sous forme de lemme.

Lemme 1.3. Soient $p_2(x,\xi)$ le symbole d'un opérateur satisfaisant

les hypothèses du lemme 1.2. et $S_\tau(x,\xi)$ défini par (1.17.). Soit ϕ une fonction réelle de $C^\infty(\overline{\Omega})$ satisfaisant grad $\phi(x) \neq 0$ dans $\overline{\Omega}$. Alors pour $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}$:

$$(1.22)\quad p_2(x,\zeta) = p_2(x,\xi) - \frac{\tau^2}{2}\{\{p_2,\phi\},\phi\} + i\tau\{p_2,\phi\}.$$

$$(1.23)\quad S_\tau(x,\zeta) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial}{\partial\xi_j} p_2(x,\zeta) \overline{\frac{\partial}{\partial\xi_k} p_2(x,\zeta)}$$

$$+ \frac{1}{\tau}\,\mathrm{Im} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} p_2(x,\zeta) \overline{\frac{\partial}{\partial\xi_j} p_2(x,\zeta)}$$

où $\zeta = \xi + i\tau\ \mathrm{grad}\phi(x)$.

Preuve : Grâce à la formule de Taylor et puisque p_2 est homogène d'ordre 2 en ξ :

$$p_2(x,\zeta) = p_2(x,\xi + i\tau\,\mathrm{grad}\phi(x)) = p_2(x,\xi) + i\tau \sum_{1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j} p_2(x,\xi) - \frac{\tau^2}{2} \sum_{j\ k=1}^{n} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x) \frac{\partial\ \phi}{\partial x_k}(x) \frac{\partial^2 p_2}{\partial\xi_j \partial\xi_k}(x,\xi).$$

L'identité (1.22) résulte alors de (1.8) et (1.11).

Pour (1.23), notons que :

$$S_\tau(x,\xi) = \frac{1}{\tau}\{\mathrm{Re}\ p_2(x,\zeta),\ \mathrm{Im}\ p_2(x,\zeta)\}$$

$$= \frac{1}{2i\tau}\ \{\overline{p_2(x,\zeta)},\ p_2(x,\zeta)\}\ ;$$

le calcul explicite du dernier crochet fournit l'expression cherchée. □

Ainsi $p_2(x,\zeta)$ est le symbole de l'opérateur $L_\tau(x,D)$ défini

par (1.13) et $p_2(x,\zeta) = 0$ si et seulement si x,ξ,τ satisfont $p^2 - \frac{\tau^2}{2}\{\{p_2,\phi\},\phi\} = \{p_2,\phi\} = 0$.

Des Lemmes 1.2 et 1.3 résulte l'inégalité de Carleman suivante :

Proposition 1.1. Soient $P_2(x,D)$ et ϕ satisfaisant les hypothèses du Lemme 1.2. On suppose de plus que pour $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}\setminus 0$:

$$(1.24) \qquad p_2(x,\xi+i\tau \operatorname{grad}\phi(x)) = 0 \implies S_\tau(x,\xi) > 0 \quad (1)$$

Il existe alors une constante K et un réel $\tau_0>0$ pour lesquels

$$(1.25) \quad \tau^3 \int |u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx + \tau \sum_{j=1}^{n} \int |D_j u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx \leqslant K \int |P_2(x,D)u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx$$

quelle que soit $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ et pour $\tau \geqslant \tau_0$.

L'hypothèse (1.24) est celle introduite par Hörmander [5] p.195 ; sa signification géométrique et la construction d'une fonction ϕ la vérifiant, lorsque (1.1) est satisfait, sont précisées dans [5] Chapitre VIII, §.8.6.

Preuve : A ce stade, il s'agit essentiellement de la preuve du Théorème 8.4.3 de Hörmander [5]. Pour la commodité du lecteur, indiquons seulement comment y intervient l'hypothèse (1.24).
Ayant fixé $x_0 \in \overline{\Omega}$, on raisonne dans une boule $B(x_0;\rho)$ de centre x_0 et de rayon ρ assez petit et on choisit des coordonnées pour lesquelles $\phi(x) = \langle x-x_0, N\rangle$ dans $B(x_0;\rho)$. L'hypothèse (1.24) signifie alors :

(1) $S_\tau(x,\xi)$ est défini par (1.7).

$S_\tau(x_0,\xi) > 0$ dans $\sum = \{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid |\xi+i\tau N| = 1$ et $p_2(x_0,\xi+i\tau N) = 0\}$.

Par continuité ($\sum$ est compact) et raisonnant par homogénéité, il en résulte :

$$(1.26) \qquad C|\xi+i\tau N|^2 \leq S_\tau(x_0,\xi) + \frac{|P_2(x_0,\xi+i\tau N)|^2}{|\xi+i\tau N|^2}$$

pour une constante C convenable. Pour $v = u \exp \tau\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \cap B(x_0;\rho))$, grâce à l'identité de Parseval, on en déduit :

$$(1.27) \qquad (2\pi)^{-n} \int |\xi+i\tau N|^2 |\hat{v}(\xi)|^2 \, d\xi \leq C_1 \{ \int S_\tau(x_0,D)v.\bar{v} \, dx + (2\pi)^{-n} \int |\xi+i\tau N|^{-2} |p_2(x_0,\xi+i\tau N)|^2 |\hat{v}(\xi)|^2 \, d\xi \} .$$

L'inégalité (1.25) résulte alors de (1.27) et (1.6) par un argument de perturbation, en majorant convenablement le membre de droite de (1.27).

□

Le résultat de la Proposition 1.1 ne dépend pas des termes d'ordre inférieur rajoutés à $P_2(x,D)$ pourvu que les coefficients de ceux-ci soient mesurables et bornés.

Proposition 1.2. *Soit $P(x,D) = P_2(x,D) + R_1(x,D)$ un opérateur différentiel d'ordre ≤ 2 , dont la partie principale satisfait les hypothèses de la Proposition 1.1. On suppose que les coefficients de $R_1(x,D)$ (d'ordre ≤ 1) appartiennent à $L^\infty(\Omega)$. Il existe alors une constante K et un réel $\tau_0 > 0$ tels que :*

$$(1.28)\quad \tau^3 \int |u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx + \tau \sum_{j=1}^{n} \int |D_j u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx \leqslant K \int |P(x,D)u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx$$

quelle que soit $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ et pour $\tau \geqslant \tau_0$.

Preuve : Il suffit d'utiliser la majoration ponctuelle :

$$|P_2(x,D)u|^2 \leqslant 2|P(x,D)u|^2 + C\Big(\sum_{j=1}^{n} |D_j u|^2 + |u|^2\Big) ,$$

et d'appliquer la Proposition 1.1. On en déduit (1.28) pour τ assez grand.

□

Remarque 1.3. L'hypothèse (1.24) joue un rôle essentiel dans la démonstration des inégalités (1.25) et (1.28). On peut montrer (voir Théorème 8.1.1. de Hörmander [5]) que cette hypothèse est nécessaire pour les obtenir.

□

Remarque 1.4. L'hypothèse (1.24) peut être affaiblie en la condition :

$$p_2(x,\xi) = \{p_2,\phi\}(x,\xi) = 0 \implies \{p_2, \{p_2,\phi\}\}(x,\xi) > 0$$

pour $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$.

L'inégalité de Carleman correspondante est alors :

$$(1.29)\quad \tau^3 \int |u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx + \tau \sum_{j=1}^{n} \int |D_j u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx \leqslant K\Big\{\int |P_2(x,D)u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx + \tau^3 \int |u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx\Big\}$$

□

1.3. - Estimation et existence dans les espaces de Sobolev H^s

Au paragraphe précédent, des estimations L^2 avec poids ont été mises en évidence : en particulier, un opérateur d'ordre $\leqslant 2$ domine, sous certaines hypothèses, toutes les dérivées d'ordre $\leqslant 1$. Ceci permet d'en déduire une estimation en la norme de Sobolev H^s. Nous en rappelons brièvement la démonstration, tout à fait classique, car elle sera reprise, convenablement modifiée aux paragraphes 3.1 et 3.2.

Proposition 1.3. *Soit $P(x,D) = P_2(x,D) + R_1(x,D)$ un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant 2$, dont la partie principale satisfait les hypothèses de la Proposition 1.1. On suppose de plus que les coefficients de $P(x,D)$ appartiennent à $C^\infty(\Omega)$.*
Soit u une distribution à support compact dans Ω telle que $P(x,D)u$ appartienne à $H^s_c(\Omega)$, $s \in R$. Alors u appartient à $H^{s+1}_c(\Omega)$ et pour tout compact K de Ω, il existe une constante $C_{s,K}$ telle que :

$$\|u\|_{s+1} \leqslant C_{s,K}(\|Pu\|_s + \|u\|_s) \ , \ u \in \mathcal{E}'(K) \ . \tag{1.30}$$

Preuve : Puisque u est une distribution d'ordre finie, on peut supposer de plus $u \in H^s_c(\Omega)$. La conclusion cherchée s'obtiendra alors en montrant la majoration :

$$\sum_{j=1}^{n} \|D_j v\|_s^2 \leqslant C_{s,K}(\tau)(\|P_\tau(x,D)v\|_s^2 + \|v\|_s^2) \ , \tag{1.31}$$

où on a posé $v = u \exp \tau\phi$ et $P_\tau(x,D) = \exp \tau\phi \ P(x,D) \exp -\tau\phi$.

Soit $\Omega' \subset\subset \Omega$ un voisinage ouvert du compact K.
Les coefficients de l'opérateur différentiel $P_\tau(x,D)$ pouvant être supposés dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et grâce à (1.28), il vient :

$$(1.32)\qquad \tau \sum_{j=1}^{n} \|D_j v\|_0^2 \leqslant C(\|P_\tau(x,D)v\|_0^2 - \tau^3\|v\|_0^2) ,$$

pour v appartenant à $\mathcal{D}(\Omega')$. Introduisons une fonction χ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int\chi(x)\,dx \neq 0$ et $K + \varepsilon \operatorname{supp}\psi \subset \Omega'$ lorsque $0<\varepsilon\leqslant 1$ et si $\psi = \Delta\chi$. Posons $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(\frac{x}{\varepsilon})$; comme $\operatorname{supp} v \subset K$, la fonction $J_\varepsilon v \equiv v * \psi_\varepsilon$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega')$ et satisfait donc (1.32).

Définissons à présent la norme introduite par Hörmander [5], [7], pour $0<\delta\leqslant 1$, $w \in H^{s-1}$ et $s \in \mathbb{R}$:

$$(1.33)\qquad \|w\|_{s-1,\delta} = \left(\int |\hat{w}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s(1+\delta^2|\xi|^2)^{-1}\,d\xi\right)^{1/2} .$$

Cette norme est équivalente, pour $\delta\neq 0$, à la norme $\|w\|_{s-1}$; lorsque $\delta \to 0$, $\|w\|_{s-1,\delta} \to \|w\|_s$ la limite pouvant être infinie. On a alors l'inégalité (voir Théorème 2.4.1 de [5])

$$(1.34)\qquad C_1\|w\|_{s-1,\delta}^2 \leqslant \int_0^1 \|w*\psi_\varepsilon\|_0^2\,\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-1}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \|w\|_{s-1}^2 \leqslant C_2\|w\|_{s-1,\delta}^2$$

quelle que soit $w \in H^{s-1}$, les constantes C_1, C_2 étant indépendantes de δ,u . De plus pour toute fonction $a \in \mathcal{S}$, on a l'inégalité (voir Théorème 2.4.2 de [5]) :

$$(1.35)\qquad \int_0^1 \|a(w*\psi_\varepsilon)-(aw)*\psi_\varepsilon\|_0^2\,\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-1}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \leqslant C_3\|w\|_{s-2,\delta}^2$$

quelle que soit $w \in H^{s-2}$, la constante C_3 étant indépendante de δ,u . De (1.32), avec v remplacé par $J_\varepsilon v$, nous déduisons donc, après commutation de $P_\tau(x,D)$ et J_ε , grâce à (1.34) :

$$(1.36)\qquad \tau \sum_{j=1}^{n} (C_1\|D_j v\|_{s-1,\delta}^2 - \|D_j v\|_{s-1}^2)$$

$$\leqslant CC_2\left(2\|P_\tau(x,D)v\|_{s-1,\delta}^2 + \tau^3\|v\|_{s-1,\delta}^2 + 2\int_0^1 \|[P_\tau(x,D), J_\varepsilon]\|_0^2\,\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-1}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right) .$$

Puisque les coefficients de $P_\tau(x,D) = \sum_{j+|\alpha|\leq 2} \tau^j a_{\alpha,j}(x) D^\alpha$ appartiennent à $\mathcal{D}(\Omega)$, il est loisible de majorer grâce à (1.35) le dernier terme de droite dans (1.36). Après quelques manipulations, il vient :

$$(1.37)\quad \tau \sum_{j=1}^{n} \|D_j v\|^2_{s-1,\delta} \leq C(\|P_\tau(x,D)v\|^2_{s-1,\delta} + \sum_{j=1}^{n} \|D_j v\|^2_{s-1,\delta} + \tau^4 \|v\|^2_s)$$

où la constante C est indépendante de τ et δ. Pour $\tau > 2C$ et lorsque $\delta \longrightarrow 0$, l'inégalité (1.31) résulte de (1.37).

□

La proposition suivante précise le "noyau" de l'opérateur $P(x,D)$ et de son adjoint au sens des distributions ${}^tP(x,D)$.

Proposition 1.4. Soit $P(x,D)$ un opérateur différentiel d'ordre ≤ 2 satisfaisant les hypothèses de la Proposition 1.3, en particulier la condition (1.24). Alors pour tout compact K de l'ouvert connexe Ω :

$$(1.38)\qquad u \in \mathcal{E}'(K) \text{ et } P(x,D)u = 0 \Longrightarrow u \equiv 0$$

$$(1.39)\qquad u \in \mathcal{E}'(K) \text{ et } {}^tP(x,D)u = 0 \Longrightarrow u \equiv 0 .$$

Preuve : L'adjoint ${}^tP(x,D)$ satisfait les mêmes hypothèses que $P(x,D)$ et il suffit de montrer (1.38). D'après la Proposition 1.3, si u appartient à $\mathcal{E}'(K)$ et satisfait $P(x,D)u = 0$ alors $u \in \mathcal{D}(K)$. Soit x_0 un point frontière du support F de u. Alors il existe une fonction ϕ réelle de $C^\infty(\Omega)$, sans points critiques, qui satisfait (1.24) et pour laquelle $F \subset \{x \in \Omega | \phi(x) \leq \phi(x_0)\}$, $F \cap \{x \in \Omega | \phi(x) = \phi(x_0)\} = \{x_0\}$. Ceci résulte des arguments de [5] Chapitre VIII, §.8.6, si la partie principale $P_2(x,D)$ de $P(x,D)$ vérifie (1.1). La fonction $u \in \mathcal{D}(K)$

satisfait ainsi $P(x,D)u = 0$ et $u = 0$ dans $\{x \in \Omega | \phi(x) > \phi(x_0)\}$. De plus, l'inégalité (1.28) a lieu pour la fonction ϕ définie ci-dessus. Du Théorème 8.9.1 (unicité du problème de Cauchy) de [5], nous déduisons alors l'existence d'un voisinage V de x_0 dans lequel $u = 0$, puis par un argument classique de connexité que $u \equiv 0$.

□

Voici finalement un résultat d'existence.

Proposition 1.5. Soit $P(x,D)$ un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant 2$ satisfaisant les hypothèses de la Proposition 1.3., pour un ouvert Ω connexe. Soient Ω' un ouvert tel que $\Omega' \subset\subset \Omega$ et $s \in \mathbb{R}$. Alors pour $f \in H^s$, il existe un élément $\tilde{u}$ de H^{s+1} tel que (au sens des distributions) :

$$P(x,D)\tilde{u} = f \text{ dans } \Omega' . \tag{1.40}$$

Preuve : C'est un argument classique de dualité (voit Théorème 8.7.2. de [5]). On remarque ici que ${}^tP(x,D)$ satisfait les mêmes hypothèses que $P(x,D)$ et que d'après la Proposition 1.4 avec $K = \overline{\Omega'}$:

$$(f,u) = 0 \tag{1.41}$$

si $u \in \mathcal{D}(K)$ et ${}^tP(x,D)u = 0$.

□

1.4. - Exemples

Voici dès à présent quelques exemples d'opérateurs $P_2(x,D)$ et de fonctions ϕ satisfaisant l'hypothèse (1.24) de la Proposition 1.1.

Les cas intéressant, outre les opérateurs elliptiques ou hyperboliques, sont constitués par les opérateurs dont le symbole satisfait (1.1) mais pas (1.2).

Exemple 1 : $n = 2$ $P_2(x,D) = x_2 D_1^2 + D_2^2$ (opérateur de Tricomi).

Cet opérateur est elliptique-hyperbolique selon le signe de x_2. Le cas intéressant est celui où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ contient la droite de "transition" $\{(x_1,0), x_1 \in \mathbb{R}\}$. Le symbole de $P_2(x,D)$ est $p_2(x,\xi) = x_2 \xi_1^2 + \xi_2^2$ et un calcul simple à l'aide de (2.4) montre que :

$$p_2(x,\xi+i\tau \operatorname{grad}\phi) = -\tau^2\left(x_2\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right|^2+\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right|^2\right) + 2i\tau\left(x_2\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\xi_2\right) + x_1\xi_1^2 + \xi_2^2$$

$$S_\tau(x,\xi) = \left(4x_2^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)\xi_1^2 + \left(4x_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2} + 2\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right) 2\xi_1\xi_2$$
$$+ \left(4\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}\right)\xi_2^2 + \tau^2\left(4x_2^2\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right|^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + 4\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right|^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}\right.$$
$$\left. + 8x_2\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\,\partial x_2} + 2\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right|^2\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right).$$

Soit $\phi(x_1,x_2) = \exp(-\gamma x_2)$ pour $\gamma>0$; c'est une fonction réelle de classe C^∞, grad $\phi(x_1,x_2) \neq 0$ et après substitution dans l'expression de S_τ :

$$S_\tau(x,\xi) = (2\gamma\xi_1^2+4\gamma^2\xi_2^2)\exp(-\gamma x_2) + 4\tau^2\gamma^4\exp(-3\gamma x_2) > 0$$

lorsque $(x_1,x_2) \in \overline{\Omega}$, $(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\tau \in \mathbb{R}\setminus 0$.

Ceci traduit qu'en chacun de ses points la droite d'équation $-x_2 = 0$ est fortement pseudo-convexe par rapport à l'opérateur de Tricomi

[15]. Le choix du signe - définit une orientation pour laquelle la normale intérieure à cette droite pointe dans le demi-espace où l'opérateur est hyperbolique. Naturellement, $x_2 D_1^2 + D_2^2$ peut être remplacé par $P_2(x,D) = a(x_1,x_2)D_1^2 + D_2^2$ où $a(x_1,x_2) = 0$ définit une courbe régulière par laquelle $\frac{\partial}{\partial x_2} a(x_1,x_2) \neq 0$ lorsque $a(x_1,x_2) = 0$.

Exemple 2 : $n > 2$ $\quad P_2(x,D) = D_n^2 + x_n \sum_1^{n-1} D_j^2$.

L'hypothèse (1.24) est satisfaite par $\phi(x) = \exp - \gamma x_n$, $\gamma>0$.

Exemple 3 : $n \geq 2$ $\quad P_2(x,D) = D_n^2 + x_n \sum_{n-k}^{j=n-1} D_j^2 + \sum_1^{j=n-k-1} D_j^2$

Pour $1<k<n$. Ici encore, on prendra $\phi(x) = \exp - \gamma x_n$, $\gamma>0$.

Exemple 4 : $n > 2$ $\quad P_2(x,D) = D_n^2 - x_n D_{n-1}^2 + D_1 D_{n-1}$.

Cet opérateur a été étudié dans Sjöstrand-Melrose [13].
On prendra toujours $\phi(x) = \exp - \gamma x_n$.

Exemple 5 : $\quad P_2(x,D) = x_2^3 D_1^2 + D_2^2$.

C'est un exemple d'opérateur elliptique-hyperbolique pour lequel il n'existe pas de fonction ϕ satisfaisant (1.24). De fait $d_{(x,\xi)} p_2(x,\xi) = 0$ lorsque $x_2 = \xi_2 = 0$ de sorte que (1.1) n'est pas vérifié.

Indiquons enfin la généralisation de l'exemple 2 qui sera l'objet des paragraphes suivants.

Exemple 6 : $n \geq 2$ $\quad P_2(x,D) = D_n^2 + x_n Q_2(x,D')$

où $Q_2(x,D')$ est un opérateur différentiel d'ordre 2 , à coefficients de classe C^1 , et de symbole $q_2(x,\xi')$ elliptique (positif) en ξ' . Ici encore, pour $\phi(x) = \exp(-\gamma x_n)$, l'expression de S_τ est :

$$S_\tau(x,\xi) = 4\gamma^2 \exp(-2\gamma x_n)\xi_n^2 + 2\gamma \exp(-\gamma x_n)\left[q_2(x,\xi') + x_n \frac{\partial q_2}{\partial x_n}(x,\xi')\right]$$

$$+ 2\tau^2 \gamma^4 \exp(-2\gamma x_n) ,$$

et l'hypothèse (1.24) est satisfaite.

II. - Perturbation singulière de certains opérateurs différentiels d'ordre 2 à coefficients réels et caractéristiques simples

2.1. - Une classe d'opérateurs elliptique-hyperbolique

On considère toujours des opérateurs différentiels $P(x,D)$ d'ordre ≤ 2, de partie principale $P_2(x,D)$ à coefficients réels et de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$. On désigne toujours par $p_2(x,\xi)$ le symbole principal de $P(x,D)$.

Soit $\tilde{H}$ une hypersurface de R^n régulière et sans points critiques. Si x_o est un point de $\tilde{H}$, il existe un voisinage Ω de x_o tel que $\tilde{H} \cap \Omega = \{x \in \Omega \mid \psi(x) = 0\}$ où ψ est une fonction C^∞ réelle pour laquelle grad $\psi(x) \neq 0$. La classe d'opérateurs qui va être définie est invariante par changement de coordonnées. Nous pouvons donc supposer $\psi(x) = x_n$ et $\tilde{H} \cap \Omega = \{x \in \Omega \mid x_n = 0\}$; on note $H = \tilde{H} \cap \Omega$. Nous examinons à présent les opérateurs $P(x,D)$, définis dans Ω, dont le symbole principal satisfait :

(2.1) $p_2(x', 0, \xi^\circ) \neq 0$ où $\xi^\circ = (0,\ldots,0,1), (x',0) \in H$

(2.2) la restriction de $p_2(x,\xi)$ à H est une forme quadratique de rang 1.

La première propriété signifie que H est non caractéristique.

La deuxième propriété signifie qu'il existe n fonctions $a_j(x')$ $1 \le j \le n$ pour lesquelles :

$$(2.2)\quad p_2(x', 0, \xi) = \Big(\sum_1^n a_j(x')\,\xi_j\Big)^2, \quad (x',0) \in H,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

D'après la propriété (2.1), $a_n(x') \neq 0$ et la forme quadratique $p_2(x',0,\xi)$ n'est pas identiquement nulle. Le symbole $X_o = \sum_{j=1}^n a_j(x')\,\xi_j$ définit la restriction à H, encore notée X_o d'un champ de vecteur X sur Ω ; on a $X_o = \sum_1^n a_j(x')\,\frac{\partial}{\partial x_j}$. Ce champ est transverse à H puisque $a_n(x') \neq 0$. Soit :

$$(2.3)\quad \sigma_{X_o} = \{(x,\xi) \in \Omega \times R^n \mid x_n = 0 \text{ et } \sum_1^n a_j(x')\,\xi_j = 0\}.$$

l'ensemble caractéristique de X_o.

D'après la propriété (2.2), nous pouvons écrire dans Ω :

$$(2.4)\quad p_2(x,\xi) = p_2(x',0,\xi) + \int_o^1 \frac{d}{dS}\, p_2(x',Sx_n,\xi)\, dS$$

$$= \Big(\sum_1^n a_j(x')\,\xi_j\Big)^2 + x_n\, q(x,\xi)$$

où $q(x,\xi) = \int_o^1 \frac{\partial}{\partial x_n}\, p_2(x', Sx_n, \xi)\, dS.$

Introduisons enfin la propriété d'ellipticité suivante :

$$(2.5)\quad q(x,\xi) \neq 0 \qquad \text{lorsque } (x,\xi) \in \sigma_{X_o}.$$

Nous avons donc décomposé le symbole principal $p_2(x,\xi)$ en $p_2(x,\xi) = X^2 + x_n q(x,\xi)$, pour X désignant aussi le symbole du champ X.

Proposition 2.1. Les propriétés (2.1), (2.2) et (2.5) du symbole principal $p_2(x,\xi)$ de l'opérateur différentiel

P(x,D) sont invariantes par changement de coordonnées.

Preuve : Les propriétés (2.1.) et (2.2) sont évidemment invariantes par changement de coordonnées. Il reste donc à examiner la propriété (2.3). Plus précisément, la décomposition :

$$(2.6)\quad p_2(x,\xi) = X^2 + x_n\, q(x,\xi).$$

et la propriété (2.5) dépendent seulement de X_0. Soit X' un champ de vecteurs sur Ω dont la restriction à H est X_0 ; alors $X' = X + x_n Y$ où Y est un autre champ de vecteurs sur Ω. En notant également X', Y les symboles des champs X', Y après substitution de X' à X dans (2.6), il vient :

$$(2.7)\quad p_2(x,\xi) = X^2 + x_n\,(q(x,\xi) + ?\, XY + x_n Y^2)$$

$$= X^2 + x_n\, \tilde{q}(x,\xi)$$

Puisque $X = X_0$ sur H, on a alors immédiatement, $\tilde{q}(x,\xi) = q(x,\xi)$ sur σ_{X_0}.

□

Corollaire 2.1 - Soit $P(x,D)$ un opérateur différentiel de symbole principal satisfaisant (2.1), (2.2) et (2.5). Alors il existe un ouvert et un système de coordonnées, encore notées Ω et x, pour lesquels :

$$(2.8)\quad p_2(x,\xi) = \xi_n^2 + x_n\, q_2(x,\xi'), \qquad (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$$

De plus, la forme quadratique (en ξ') $q_2(x,\xi')$ est elliptique (positif) :

$$(2.9)\quad q_2(x,\xi') > 0 \qquad (x,\xi') \in \Omega \times (\mathbb{R}^{n-1} \setminus 0).$$

Preuve : Il suffit de définir un système de coordonnées pour lequel H est invariant et transformant une perturbation du symbole X en ξ_n. Cela est immédiat en notant que, d'après (2.1), le champ de vecteur X_0 est transverse à H. La propriété (2.9) (où on a choisi le signe positif par commodité) résulte de (2.5). □

Les opérateurs différentiels envisagés par la suite seront ceux dont le symbole principal satisfait (2.1), (2.2) et (2.5). Il s'agit donc (Corollaire 2.1.) d'opérateurs elliptique-hyperbolique, la direction d'hyperbolicité étant normale à l'hypersurface H.

2.2. - Perturbation d'opérateurs elliptique-hyperbolique et inégalité d'énergie avec poids.

Ce paragraphe étudie une perturbation singulière associée à la classe d'opérateurs elliptique - hyperbolique introduite précédemment. Sont par conséquent considérés les opérateurs différentiels d'ordre ≤ 2, dont le symbole principal satisfait (2.1), (2.2) et (2.5). D'après le Corollaire 2.1., la partie principale de tels opérateurs s'écrit dans un voisinage de l'origine :

$$(2.10)\quad P_2(x,D) = D_n^2 + R_2(x,D') = D_n^2 + x_n Q_2(x,D'),$$

où $Q_2(x,D')$ est un opérateur tangentiel de symbole $q_2(x,\xi')$ elliptique (positif) en ξ' : on notera $r_2(x,\xi') = x_n q_2(x,\xi')$.

Introduisons à présent deux opérateurs différentiels B_ν, C_ν paramétrés par $\nu>0$, de symbole b_ν, c_ν à coefficients réels et réguliers lorsque $x_n < 0$.

(2.11) $B_\nu = B_\nu(x,D')$ est un opérateur tangentiel d'ordre 2, auto-adjoint, à support dans le demi-espace $x_n \leq 0$.

(2.12) $C_\nu = C_\nu(x,D')$ est un opérateur tangentiel d'ordre 4, auto-

adjoint, à support dans le demi-espace $x_n \leq 0$.

(2.13) $b_\nu(x,\xi') > 0$, $-c_\nu(x,\xi') > 0$, lorsque $x_n < 0$, $\nu > 0$.

Posons alors par définition :

(2.14) $K_\nu(x,D) = C_\nu(x,D') - 2i\, B_\nu(x,D)\, D_n$,

et considérons la perturbation singulière suivante de $P_2(x,D)$:

(2.15) $P_2(x,D) + K_\nu(x,D)$.

La proposition suivante est l'analogue du Lemme 1.2. L'argument utilisé est reminescent des inégalités d'énergie avec poids pour les opérateurs 2-paraboliques (ici $P_2(x,D) + K_\nu(x,D)$, cf. Trèves [14]).

Proposition 2.1. Soient $P_2(x,D)$, $K_\nu(x,D)$ définis par (2.10), (2.14) et (2.11), (2.12). Soit $\phi = \phi(x_n)$ une fonction réelle et C^∞. Alors il existe une constante $C > 0$ pour laquelle, quelle que soit $u \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$
\begin{aligned}
(2.16)\quad & \int |P_2(x,D)u + K_\nu(x,D)u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx \\
& \geq -\frac{\tau}{2} \operatorname{Im} \int F_\tau(x,D)v\cdot\bar{v}\,dx + \tau \operatorname{Re} \int_{x_n<0} \phi'(x_n)\, G_\nu(x,D')v\cdot\bar{v}\, dx \\
& + \tau \operatorname{Re} \int_{x_n<0} 2\phi'(x_n)\, B_\nu(x,D')\, C_\nu(x,D')\, v\cdot\bar{v}\, dx \\
& - \tau \operatorname{Re} \int_{x_n<0} 2\phi'(x_n)\, B_\nu(x,D')\, D_n v\cdot\overline{D_n v}\, dx \\
& - \tau^3 \operatorname{Re} \int_{x_n<0} \phi'(x_n)\, Q_0(x)\, B_\nu(x,D')v\cdot\bar{v}\, dx \\
& - C\tau^2 |||v|||_0^2 - \tau \operatorname{Re} \int_{x_n<0} (\phi'(x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} B_\nu(x,D') + \phi''(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n} B_\nu(x,D'))v\cdot\bar{v}\, dx
\end{aligned}
$$

$$+ \tau\mathrm{Re}\int_{x_n=0} \phi'(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n} B_\nu(x,D')v\cdot\bar{v}dx' + \tau\mathrm{Re}\int_{x_n<0} 2\frac{\partial}{\partial x_n}(\phi'(x_n)B_\nu(x,D')^2)v\cdot\bar{v}dx$$

avec $\tau \in \mathbb{R}$, $v = u \exp \tau\phi$. On a posé :

$$F_\tau(x,D) \equiv [P_2(x,D) - \frac{\tau^2}{2} Q_0(x), Q_1(x,D)] + (R_2^*(x,D) - R_2(x,D))Q_1(x,D)$$

$$G_\nu(x,D) \equiv -\frac{\partial}{\partial x_n} C_\nu(x,D') + 2 R_2(x,D') B_\nu(x,D').$$

les opérateurs Q_1 et Q_0 étant définis par (1.8) et (1.10).

Preuve : Puisque $\phi = \phi(x_n)$, en utilisant les notations du paragraphe 1, il est aisé de vérifier les identités suivantes :

$$(2.17)\quad \exp \tau\phi\, P_2(x,D) \exp -\tau\phi = L_\tau(x,D) - \tau P_2(x,D)\phi$$

$$= P_2(x,D) + i\tau Q_1(x,D) - \frac{\tau^2}{2} Q_0(x) - \tau P_2(x,D)\phi$$

$$= P_2(x,D) + 2i\tau\phi'(x_n)D_n - \tau^2|\phi'(x_n)|^2 - \tau\phi''(x_n)$$

$$(2.18)\quad \exp \tau\phi\, K_\nu(x,D) \exp -\tau\phi = K_\nu(x,D) + \tau[\phi, K_\nu(x,D)]^{(1)}$$

$$= C_\nu(x,D') - 2i B_\nu(x,D') D_n + 2\tau\phi'(x_n) B_\nu(x,D').$$

On forme à présent :

$$(2.19)\quad I \equiv \int |P_2(x,D)u + K_\nu(x,D)u|^2 \exp 2\tau\phi\, dx,$$

Après avoir posé $v = u \exp \tau\phi$ dans (2.19), puis appliqué

(1) On utilise l'analogue du lemme 1.1., en notant que K_ν est d'ordre 1 en D_n.

(2.17), (2.18), le carré est minoré et développé en groupant convenablement les différents termes. Ainsi :

$$(2.20)\quad I \geq \frac{1}{2}\int |P_2(x,D)v - \frac{\tau^2}{2} Q_0(x)v + K_v(x,D)v|^2\, dx$$
$$+ \frac{1}{2}\int |i\tau Q_1(x_1,D)v + 2\tau\phi'(x_n)\, B_v(x,D')v|^2 dx - c\tau^2 ||v||_0^2 + J$$

en posant :

$$(2.21)\quad J \equiv \mathrm{Re}\int (P_2(x,D)v - \frac{\tau^2}{2} Q_0(x)v + K_v(x,D)v).\overline{(i\tau Q_1(x,D)v} + \overline{2\tau\phi'(x_n)\, B_v(x,D')v)}\, dx$$

Le terme $J_1 \equiv \mathrm{Re}\int (P_2(x,D)v - \frac{\tau^2}{2} Q_0(x)v).\overline{i\tau Q_1(x,D)v}\, dx$, dans (2.21), a été étudié implicitement lors de la preuve du Lemme 1.2 . Un argument classique (pour les opérateurs hyperboliques) de commutation permet d'obtenir :

$$(2.22)\quad 2\tau^{-1}J_1 = 2\mathrm{Im}\int (P_2(x,D) - \frac{\tau^2}{2} Q_0(x))v.\overline{Q_1(x,D)v}\, dx$$
$$= -\mathrm{Im}\int [P_2(x,D) - \frac{\tau^2}{2} Q_0(x), Q_1(x,D)]\, v.\bar{v}\, dx$$
$$+\mathrm{Im}\int (P_2(x,D) - \frac{\tau^2}{2} Q_0(x))v.\overline{(Q_1(x,D) - Q_1^*(x,D))v}\, dx$$
$$+\mathrm{Im}\int ((P_2(x,D) - \frac{\tau^2}{2} Q_0(x)) - (P_2(x,D) - \frac{\tau^2}{2} Q_0(x))^*)v.$$
$$\overline{Q_1(x,D)v}\, dx$$

Le même argument de commutation est utilisé pour étudier $J_2 \equiv \mathrm{Re}\int C_v(x,D')v.\overline{i\tau Q_1(x,D)v}\, dx$ dans (2.21) (où K_v est défini par (2.14). D'après (2.12) et puisque $Q_1(x,D) = 2\phi'(X_n)\, D_n$, il vient grâce à la formule de Green :

$$(2.23)\quad 2\tau^{-1} J_2 = 2\ \mathrm{Im}\int_{x_n<0} C_v(x,D')v.\overline{Q_1(x,D)v}\, dx$$

$$= - \operatorname{Im} \int_{x_n<0} [C_\nu^{-}(x,D'), Q_1(x,D)] \, v.\bar{v} \, dx$$

$$+ \operatorname{Im} \int_{x_n<0} C_\nu(x,D') u \overline{(Q_1(x,D) - Q_1^*(x,D)) v} \, dx$$

$$- \operatorname{Re} \int_{x_n=0} 2 \phi'(x_n) \, C_\nu(x,D') v.\bar{v} \, dx' .$$

D'après (2.12) $C_\nu(x,D')\Big|_{x_n=0} \equiv 0$ et d'après la définition de Q_1, $Q_1(x,D) - Q_1^*(x,D) = 2i\phi''(x_n)$,

$[C_\nu(x,D'), Q_1(x,D)] = 2i\phi'(x_n) \frac{\partial}{\partial x_n} C_\nu(x,D')$, de sorte que :

$$(2.24) \quad 2\tau^{-1} J_2 = -2\operatorname{Re} \int_{x_n<0} \phi'(x_n) \frac{\partial}{\partial x_n} C_\nu(x,D') v.\bar{v} \, dx$$

$$- 2\operatorname{Re} \int_{x_n<0} \phi''(x_n) \, C_\nu(x,D') \, v.\bar{v} \, dx$$

On étudie ensuite $J_3 \equiv \operatorname{Re} \int - 2i \, B_\nu(x,D') D_n v. \overline{i\tau Q_1(x,D) v} \, dx$; d'après (2.11) et la définition de $Q_1(x,D)$:

$$(2.25) \quad 2\tau^{-1} J_3 = - 4 \operatorname{Re} \int_{x_n<0} B_\nu(x,D') \, D_n v. \overline{Q_1(x,D) v} \, dx$$

$$= - 8 \operatorname{Re} \int_{x_n<0} \phi'(x_n) \, B_\nu(x,D') \, D_n v. \overline{D_n v} \, dx$$

Il reste à étudier

$J_4 \equiv 2\tau \operatorname{Re} \int (P_2(x,D) - \frac{\tau^2}{2} Q_0(x) + K_\nu(x,D)) v. \overline{\phi'(x_n) \, B_\nu(x,D') \, v} \, dx$ en distinguant trois parties dans l'expression $P_2 - \frac{\tau^2}{2} Q_0 + K_\nu$. Tout d'abord, $2\tau^{-1} J_4' \equiv 4 \operatorname{Re} \int D_n^2 v. \overline{\phi'(x_n) \, B_\nu(x,D') v} \, dx$ est comparé à $2\tau^{-1} J_3$; d'après (2.11), en intégrant deux fois par partie en D_n

et puisque $D_n(\phi'(x_n)\, B_\nu(x,D')) = \phi'(x_n)B_\nu(x,D')D_n - i\frac{\partial}{\partial x_n}(\phi'(x_n)\, B_\nu(x,D'))$,

$$[D_n, \frac{\partial}{\partial x_n}(\phi'(x_n)\, B_\nu(x,D'))] = -i\phi'(x_n)\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} B_\nu(x,D') - 2i\phi''(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n} B_\nu(x,D')$$
$$- i\phi'''(x_n)\, B_\nu(x,D') :$$

$$(2.26)\quad 2\tau^{-1}J_4' = 4\mathrm{Re}\int_{x_n<0} \phi'(x_n)B_\nu(x,D')D_n v.\overline{D_n v}dx$$
$$- 4\ \mathrm{Im}\int_{x_n<0} D_n v.\overline{\frac{\partial}{\partial x_n}(\phi'(x_n)\, B_\nu(x,D'))v}\ dx$$
$$= 4\ \mathrm{Re}\int_{x_n<0} \phi'(x_n)\, B_\nu(x,D')\, D_n\, v.\overline{D_n v}\, dx.$$
$$- 2\ \mathrm{Re}\int_{x_n<0} (\phi'(x_n)\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} B_\nu(x,D') + 2\phi''(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}B_\nu(x,D')$$
$$+ \phi'''(x_n)\, B_\nu(x,D'))v.\bar{v}dx$$
$$+ 2\ \mathrm{Re}\int_{x_n=0} \phi'(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n} B_\nu(x,D')\ v.\bar{v}\ dx'$$

On note ensuite que, d'après (2.11) :

$$(2.27)\quad 2\tau^{-1}\, J_4'' \equiv 4\ \mathrm{Re}\int (R_2(x,D') - \frac{\tau^2}{2} Q_0(x)$$
$$+ C_\nu(x,D'))v.\overline{\phi'(x_n)B_\nu(x,D')v}\ dx$$
$$= 4\ \mathrm{Re}\int_{x_n<0}\phi'(x_n)B_\nu(x,D')(R_2(x,D') - \frac{\tau^2}{2}Q_0(x)$$
$$+ C_\nu(x,D'))\ v.\bar{v}\ dx$$

Enfin, si $2\tau^{-1}\, J_4''' \equiv 4\ \mathrm{Re}\int -2iB_\nu(x,D')D_n v.\overline{\phi'(x_n)B_\nu(x,D')v}\ dx$

puisque $[B_\nu(x,D'),D_n] = i\frac{\partial}{\partial x_n} B_\nu(x,D')$ et d'après (2.11)

$$(2.28)\quad 2\tau^{-1}\, J_4''' = 4\ \mathrm{Im}\int_{x_n<0} 2\phi'(x_n)\, D_n\, B_\nu(x,D')v.\overline{B_\nu(x,D')v}\ dx$$

$$+ 8\mathrm{Re} \int_{x_n<0} \phi^{\flat}(x_n) \frac{\partial}{\partial x_n} B_\nu(x,D')v.\overline{B_\nu(x,D')v}\, dx$$

$$= 4 \int_{x_n<0} \phi''(x_n)[B_\nu(x,D')v|^2 dx$$

$$+ 8\mathrm{Re} \int_{x_n<0} \phi'(x_n) B_\nu(x,D') \frac{\partial}{\partial x_n} B_\nu(x,D')v.\bar{v}\, dx$$

Il reste à remarquer que dans (2.22), d'après (2.10) ,

$$(P_2(x,D) - \frac{\tau^2}{2} Q_0(x)) - (P_2(x,D) - \frac{\tau^2}{2} Q_0(x))^* = R_2(x,D')-R_2^*(x,D').$$

D'autre part, d'après la définition de K_ν, qui est à support dans $x_n<0$:

$$J_5 \equiv \mathrm{Im} \int K_\nu(x,D)v.\overline{(Q_1(x,D)-Q_1^*(x,D))v}\, dx$$

$$= - 2\mathrm{Re} \int_{x_n<0} \phi''(x) C_\nu(x,D')v.\bar{v}dx + 2\mathrm{Im} \int_{x_n<0} B_\nu(x,D')v.\overline{2\phi'(x_n)D_n v}\, dx$$

Soit, d'après (2.11) :

$$(2.29)\quad J_5 \equiv \mathrm{Im} \int K_\nu(x,D)v.\overline{(Q_1(x,D)-Q_1^*(x,D))v}\, dx$$

$$= - 2\mathrm{Re} \int_{x_n<0} \phi''(x_n) C_\nu(x,D')v.\bar{v}\, dx$$

$$- 2\mathrm{Re} \int_{x_n<0} (\phi''(x_n) \frac{\partial}{\partial x_n} B_\nu(x,D') + \phi'''(x_n) B_\nu(x,D'))v.\bar{v}\, dx$$

En définitive, on peut réécrire (2.22) avec (2.29) ainsi,

$$(2.30)\quad 2\tau^{-1} J_1 = - \mathrm{Im} \int ([P_2(x,D) - \frac{\tau^2}{2} Q_0(x), Q_1(x,D)]$$

$$+ (R_2^*(x,D')-R_2(x,D'))Q_1(x,D))v.\bar{v}\, dx$$

$$+ \operatorname{Im} \int (P_2(x,D) - \frac{\tau^2}{2} Q_0(x) + K_\nu(x,D))v . \overline{(Q_1(x,D) - Q_1^*(x,D))v} \, dx$$

$$- J_5$$

L'inégalité cherchée résultera, puisque $J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4' + J_4'' + J_4'''$, de (2.20), (2.21) avec (2.23),(2.25),(2.26),(2.27),(2.28) et (2.29) (2.30) ; on applique l'inégalité de Cauchy Schwarz à la seconde intégrale dans (2.30) ($Q_1 - Q_1^* = 2\, i\phi''$). On remarque que des termes se simplifient entre J_1 (ceux de $-\frac{\tau}{2} J_5$) et J_2, J_4', de même entre J_2 et J_4'. □

Remarque 2.1. Lorsque $P_2(x,D)$ est auto-adjoint, l'opérateur $F_\tau(x,D)$ défini dans l'énoncé de la Proposition 2.1. satisfait $i\, F_\tau(x,D) = S_\tau(x,D) + R_1(x,D)$.
où $S_\tau(x,D)$ est l'opérateur introduit au Lemme 1.2. et $R_1(x,D)$ un opérateur d'ordre ≤ 1.
□

2.3. - Perturbation d'opérateur elliptique-hyperbolique et inégalités de Carleman (I).

De l'inégalité (2.16) résultera une inégalité de Carleman pour l'opérateur perturbé $P_2(x,D) + K_\nu(x,D)$. L'opérateur $P_2(x,D)$ appartiendra à la classe définie au paragraphe 2.1. Des hypothèses convenables sur la dépendance en ν, x_n de $K_\nu = C_\nu - 2i\, B_\nu D_n$ permettront d'estimer, lorsque $x_n < 0$, les dérivées qui lui sont associées.

Voici les hypothèses pour B_ν, C_ν.

(2.31) $B_\nu(x,D') = \nu\, B(x,D')$ et $C_\nu(x,D') = \nu\, C(x,D')$, où les opérateurs B,C, indépendants de ν, satisfont (2.11)-(2.13).

(2.32) $b_\nu(x',0,\xi') \equiv 0$ et $\frac{\partial}{\partial x_n} b_\nu(x,\xi') < 0$ pour $x_n \leq 0$.

(2.33) $c_\nu(x,0,\xi') \equiv 0$ et $-\frac{\partial}{\partial x_n} c_\nu(x,\xi') > 0$ pour $x_n \leq 0$[1].

(2.34) $-\frac{\partial}{\partial x_n} c_\nu(x,\xi') + 2r_2(x,\xi')b_\nu(x,\xi') < 0$ pour $x_n \leq 0$.

On suppose par ailleurs :

(2.35) φ est une fonction réelle de classe C^∞ et sans points critiques dans $\overline{\Omega}$.

Nous pouvons maintenant évaluer :

Proposition 2.2. Soit $P_2(x,D) = D_n^2 + R_2(x,D')$ avec $R_2(x,D') = x_n Q_2(x,D')$ où $Q_2(x,D')$ est auto-adjoint, elliptique en D'.
Soient $B_\nu(x,D')$, $C_\nu(x,D')$ satisfaisant (2.31), (2.34) et $K_\nu(x,D) = C_\nu(x,D') - 2i\, B_\nu(x,D')\, D_n$.
Alors il existe une fonction ϕ satisfaisant (2.35) et une constante $C > 0$ telles que :

$$
\begin{aligned}
(2.36)\quad & \tau^3 \int |u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx + \tau \sum_{j=1}^{n} \int |D_j u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx \\
& + \nu\tau \sum_{j,k=1}^{n-1} \int_{x_n<0} |D_{jk}^2 u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx \\
& + \nu\tau^3 \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_n<0} (-x_n) |D_j u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx \\
& + \nu\tau \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_n<0} (-x_n) |D_j D_n u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx \\
& + \nu^2\tau \sum_{j,k,\ell=1}^{n-1} \int_{x_n<0} x_n^2 \, |D_{jk\ell}^3 u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx
\end{aligned}
$$

---

(1) $B_\nu(x,D')$, $C_\nu(x,D')$ sont les opérateurs de symboles $b_\nu(x,\xi')$, $c_\nu(x,\xi')$.

$$\leq C \int |P_2(x,D)u + K_\nu(x,D)u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx$$

pour $\tau \geq \tau_0$, $0 < \nu \leq \nu_0$, et quelle que soit $u \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Supposons $R_2(x,D')$ auto-adjoint n'est pas restrictif. En effet, $R_2 = \frac{1}{2}(R_2+R_2^*) + \frac{1}{2}(R_2-R_2^*)$, où la partie anti auto-adjointe est un opérateur d'ordre 1, et on déduit par l'argument de la Proposition 1.2., la proposition qui suit.

Proposition 2.3. Soit $P(x,D) = D_n^2 + R_2(x,D') + R_1(x,D)$ un opérateur différentiel d'ordre ≤ 2 ; on suppose les hypothèses de la Proposition 2.2. satisfaite et l'appartenance à $L^\infty(\Omega)$ des coefficients de $R_1(x,D)$. Alors la conclusion de la Proposition 2.2. est satisfaite avec $P_2(x,D)$ remplacé par $P(x,D)$.

Remarque 2.2. - L'hypothèse (2.34) montre que la perturbation $K_\nu(x,D)$ dépends de l'opérateur $R_2(x,D)$; elle est naturelle pour $R_2(x,D)$ satisfaisant (2.10). □

Preuve : L'inégalité (2.36) est locale : il suffit de répéter l'argument du point A) de la preuve de la Proposition 1.1. On peut en particulier distinguer, étant donné h avec $h > 0$, distinguer trois régions dans Ω selon que $x_n > \frac{h}{2}$, $|x_n| < h$, $x_n < -\frac{h}{2}$. Il suffit à cet effet d'introduire trois fonctions réelles C^∞ de la variable x_n telles que

$$(2.37) \qquad \alpha_+(x_n) + \alpha_0(x_n) + \alpha_-(x_n) = 1 \qquad \forall\, x_n \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{supp} \alpha_+ \subset]+\tfrac{h}{2}, +\infty[\quad \text{et} \quad \alpha_+ \equiv 1 \quad \text{sur} \quad [+h, +\infty]$$

$$\operatorname{supp} \alpha_0 \subset]-h, +h[\quad \text{et} \quad \alpha_0 \equiv 1 \quad \text{sur} \quad [-\tfrac{h}{2}, +\tfrac{h}{2}]$$

$$\text{supp } \alpha_- \subset]-\infty, -\frac{h}{2}[\quad \text{et} \quad \alpha_- \equiv 1 \quad \text{sur} \quad [+h, +\infty].$$

Si $\{\alpha_\mu\}_{\mu=1}^{\mu=M}$ désigne la partition de l'unité de la Proposition 1.1, on écrira alors :

$$(2.38) \qquad \alpha_\mu = \alpha_\mu^+ + \alpha_\mu^0 + \alpha_\mu^- + (\alpha_+\alpha_\mu) + (\alpha_0\alpha_\mu) + (\alpha_-\alpha_\mu).$$

A) - $x_n > \frac{h}{2}$

Puisque $p_2(x,\xi) = \xi_n^2 + r_2(x,\xi') = \xi_n^2 + x_n q_2(x,\xi')$ où $q_2(x,\xi')$ est elliptique positif en ξ', $p_2(x,\xi)$ est par conséquent elliptique en ξ à caractéristiques complexes simples dans $\Omega^+_{\frac{h}{2}} = \Omega \cap \{x \mid x_n > \frac{h}{2}\}$. Les résultats de Hörmander [5] (paragraphe 8.6) montrent alors l'existence d'une fonction ϕ satisfaisant (2.35) et (1.24) dans $\Omega^+_{\frac{h}{2}}$. Par conséquent, notant que $K_\nu(x,D) \equiv 0$ lorsque $x_n > \frac{h}{2}$, il suffit de répéter la preuve de la Proposition 1.1. pour obtenir (2.36) lorsque $u \in \mathcal{D}(\Omega^+_{\frac{h}{2}})$ c'est-à-dire en fait (1.25).

B) - $|x_n| < h$

C'est la région critique où $r_2(x,\xi')$ change de signe et K_ν n'est plus identiquement nulle. On utilise à présent l'inégalité (2.16) où $\phi = \phi(x_n)$, en y remplaçant (compte tenu de la remarque préliminaire) Ω par $\Omega \cap B(x_0;h)$ avec $x_0 \in \Omega \cap \{x_n=0\}$. On désignera par γ toute constante positive indépendante de ν,τ,u. Avec la Remarque 2.1. :

$$(2.39) \qquad -\frac{\tau}{2} \operatorname{Im} \int F_\tau(x,D)v.\bar{v}dx \geq \frac{\tau}{2} \operatorname{Re} \int S_\tau(x,D)v.\bar{v}\,dx$$

$$\geq \gamma \left(\|v\|_1^2 + \tau^2 \|v\|_0^2 \right).$$

où $S_\tau(x,D)$ est l'opérateur de symbole
$S_\tau(x,\xi) = \{p_2,\{p_2,\phi\}\} + \frac{\tau^2}{2} \{\{p_2,\phi\},\{\{p_2,\phi\},\phi\}\}$. Montrons que ce symbole est positif :

Il existe $\phi = \phi(x_n)$, satisfaisant (2.35) strictement décroissante et convexe (par exemple $\phi(x_n) = \exp(-x_n)$) de sorte que

(2.40) $\{\{p_2,\phi\},\{\{p_2\phi\},\phi\}\} = 4\tau^2 |\phi'(x_n)|^2 \phi''(x_n) > 0$, si $\tau \neq 0$.

Si $p_2(x,\xi) = \xi_n^2 + r_2(x,\xi')$, le champ hamiltonien associé est
$H_{p_2} = 2\xi_n \frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial}{\partial x_n} r_2(x,\xi') \frac{\partial}{\partial \xi_n} + \sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} r_2(x,\xi') \frac{\partial}{\partial x_j} \right.$

$\left. - \frac{\partial}{\partial \xi_j} r_2(x,\xi') \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)$ et $H_{p_2}\phi(x_n) = 2\phi'(x_n)\xi_n$. Puisque $r_2(x,\xi')$ satisfait (2.10), si le rayon h de la boule $B(x_0;h)$ est assez petit, le champ H_{p_2} s'écrit encore pour $(x,\xi) \in B(x_0;h) \times \mathbb{R}^n$:

(2.41) $H_{p_2} = 2\xi_n \frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial}{\partial x_n} r_2(x',0,\xi') \frac{\partial}{\partial \xi_n} + x_n V(x, \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial \xi})$

où $\frac{\partial}{\partial x_n} r_2(x',0,\xi') = q_2(x',0,\xi') > 0$ et V désigne un champ de vecteur. Alors pour $\phi = \phi(x_n)$ strictement convexe et décroissante, h donc $|x_n|$ assez petit :

(2.42) $\{p_2,\{p_2,\phi\}\} = H_{p_2}^2 \phi = 4\phi'(x_n)\xi_n^2 - 2\phi'(x_n) \frac{\partial}{\partial \xi_n} r_2(x',0,\xi')$

$+ x_n V(x, \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial \xi})(2\phi'(x_n)\xi_n) > 0,$

avec $x \in \Omega \cap B(x_0;h)$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$.

Ainsi, d'après (2.40) et (2.42), par homogénéité :

$$(2.43)\qquad S_\tau(x,\xi) \geq \gamma\,(|\xi|^2+\tau^2) \quad \text{pour} \quad x \in \Omega \cap B(x_0;h),\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \tau \in \mathbb{R}\,|\,0.$$

Grâce à (2.39), (2.43) et l'inégalité de Gårding ($v \in \mathcal{D}(\Omega \cap B(x_0,h))$), en choisissant τ assez grand, on obtient :

$$(2.44)\qquad -\frac{\tau}{2}\,\mathrm{Im}\int F_\tau(x,D)v.\bar{v}\,dx \geq \gamma\tau\,(\sum_1^n ||D_j v||_0^2 + \tau^2\,||v||_0^2).$$

On désigne toujours par $\phi = \phi(x_n)$ une fonction satisfaisant (2.35) strictement décroissante et convexe. Grâce à (2.31)-(2.34), on déduit successivement du théorème de Fubini et de l'inégalité de Gårding, pour $v \in \mathcal{D}(\Omega \cap B(x_0;h))$:

$$(2.45)\qquad \tau\,\mathrm{Re}\int_{x_n<0}\phi'(x_n)\,G_\nu(x,D')v.\bar{v}\,dx \geq \gamma\nu\tau\Big(\sum_{j,k=1}^{n-1}\int_{x_n<0}|D^2_{jk}v|^2\,dx - \int_{x_n<0}|v|^2\,dx$$

$$(2.46)\qquad \tau\,\mathrm{Re}\int_{x_n<0}2\phi'(x_n)B_\nu(x,D')C_\nu(x,D')\,v.\bar{v}\,dx \geq \gamma\nu^2\tau\sum_{j,k,\ell=1}^{n-1}\int_{x_n<0}x_n^2\,|D^3_{jk\ell}v|^2dx - \gamma\nu^2\tau\int_{x_n<0}x_n^2\,|v|^2\,dx.$$

$$(2.47)\qquad -\tau\,\mathrm{Re}\int_{x_n<0}2\phi'(x_n)B_\nu(x,D')D_n v.\overline{D_n v}\,dx \geq \gamma\nu\tau\sum_{j=1}^{n-1}\int_{x_n<0}(-x_n)\,|D^2_{jn}v|^2\,dx - \gamma\nu\tau\int_{x_n<0}(-x_n)\,|D_n v|^2\,dx.$$

$$(2.48)\quad -\tau^3\,\mathrm{Re}\int_{x_n<0}\phi'(x_n)\,Q_0(x)B_\nu(x,D')v.\bar{v}\,dx$$
$$\geq \gamma\nu\tau^3\sum_{j=1}^{n-1}\int_{x_n<0}(-x_n)\,|D_j v|^2\,dx - \gamma\nu\tau^3\int_{x_n<0}(-x_n)\,|v|^2\,dx.$$

En utilisant de plus la continuité de la trace $v \to v|_{x_n=0}$ il vient :

$$(2.49)\quad \tau\,\mathrm{Re}\int_{x_n=0}\phi'(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}B_\nu(x,D')v.\bar{v}dx' \geq -\gamma\nu\tau\sum_{|\alpha|\leq 1}\int_{x_n<0}|D^\alpha v|^2\,dx$$

Enfin, utilisant la continuité des opérateurs considérés :

$$(2.50)\quad -\tau\,\mathrm{Re}\int_{x_n<0}(\phi'(x_n)\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}B_\nu(x,D') - \phi'''(x_n)B_\nu(x,D'))v.\bar{v}\,dx$$
$$\geq -\gamma\nu\tau\Big(\sum_1^{n-1}\int_{x_n<0}|D_j v|^2\,dx + \int_{x_n<0}|v|^2\,dx\Big).$$

$$(2.51)\quad \tau\,\mathrm{Re}\int_{x_n<0}2\frac{\partial^2}{\partial x_n}(\phi'(x_n)\,B_\nu(x,D')^2)v.\bar{v}\,dx$$
$$\geq -\gamma\nu^2\tau\sum_{|\alpha'|\leq 2}\int_{x_n<0}|D^{\alpha'}v|^2\,dx.$$

Les estimations (2.44)-(2.51) permettent de minorer tous les termes du membre de droite de (2.16). En regroupant selon l'ordre des dérivations, pour $\tau \geq 1$ assez grand et $\nu < 1$ assez petit, il résulte de (2.16), pour $v \in \mathcal{D}(\Omega \cap B(x_0;h))$ et $\phi = \phi(x_n)$:

$$(2.52)\quad \gamma \int |P_2(x,D)u + K_\nu(x,D)u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx$$

$$\geq \tau \Big(\sum_{j=1}^{n} ||D_j v||_o^2 + \tau^2 ||v||_o^2 \Big) + \nu\tau \sum_{j,k=1}^{n-1} \int_{x_n<o} |D_{jk}^2 v|^2 \, dx$$

$$+ \nu^2\tau \sum_{j,k,\ell=1}^{n-1} \int_{x_n<o} x_n^2 |D_{jk\ell}^3 v|^2 \, dx$$

$$+ \nu\tau \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_n<o} (-x_n) |D_{jn}^2 v|^2 \, dx$$

$$+ \nu\tau^3 \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_n<o} (-x_n) |D_j v|^2 \exp 2\tau\phi$$

Puisque $v = u \exp \tau\phi(x_n)$, nous déduisons finalement (2.36), lorsque $u \in \mathcal{D}(\Omega \cap B(x_o;h))$, de (2.52) en remarquant que $\exp \tau\phi(x_n) D_j u = D_j v$ pour $1 \leq j \leq n-1$, $\exp \tau\phi(x_n) D_n u = D_n v + i\tau\phi'(x_n)v$ et en choisissant τ assez grand.

$$\underline{C}) \quad -x_n < -\frac{h}{2}$$

L'hypothèse (2.10) signifie ici que $p_2(x,\xi)$ est strictement hyperbolique par rapport à la direction grad x_n. On peut donc appliquer les méthodes classiques d'inégalités d'énergie (cf. Hörmander [5], Trèves [14]) à $P_2(x,D)$. A cet effet, on utilise l'inégalité (2.16) où $-\frac{\tau}{2} \int F_\tau(x,D)\, v.\bar{v}\, dx$ est remplacé par $J_1 \equiv \tau \operatorname{Im} \int (P_2(x,D) - \frac{\tau^2}{2} Q_o(x))\, v.\overline{Q_1(x,D)v}\, dx$. Une telle inégalité est immédiate d'après la preuve de la Proposition 2.1. : compte tenu de la définition (2.21) de J, il suffit de ne pas utiliser (2.22) pour transformer J_1. Il est alors classique que :

$$(2.53)\qquad J_1 \geq \gamma\,\tau\,\Big(\sum_{j=1}^{n} \|D_j v\|_0^2 + \tau^2\,\|v\|_0^2\Big)$$

Procédant alors comme au point B), mais avec (2.53) au lieu de (2.44), l'inégalité (2.36) en résulte pour $u \in \mathcal{D}(\Omega \cap \{x \mid x_n < \frac{h}{\gamma}\})$.

Remarque 2.3. D'après l'exemple 6 du paragraphe 1.4, la condition (1.24) est satisfaite par $p_2 = \xi_n^2 + r_2(x,\xi')$ et $\phi = \exp(-\gamma x_n)$. On ne peut néanmoins minorer $\mathrm{Re}\int S_\tau(x,D)\, v.\bar{v}\, dx$ dans (2.39) à la façon de la Proposition 1.1. : par ce procédé, il apparait un terme $\dfrac{2\,C_1}{\tau^2\,|\phi'(x_n)|^2}\int |P_2(x,D)u|^2 \exp 2\tau\phi\, dx$ (cf. (1.34) et (1.35)) qui n'est pas comparable à $\int |P_2(x,D)u + K_\nu(x,D)u|^2 \exp 2\tau\phi\, dx$ (ni aux termes de gauche de (2.36)). □

Remarque 2.4. Lorsque $B_\nu(x,D') \equiv 0$, l'inégalité (2.36) devient :

$$(2.54)\qquad \tau^3 \int |u|^2 \exp 2\tau\phi\, dx + \tau \sum_{1}^{n} \int |D_j u|^2 \exp 2\tau\phi\, dx + \nu\tau \sum_{j,k=1}^{n-1} \int_{x_n<0} |D_{jk}^2 u|^2 \exp 2\tau\phi\, dx$$

$$\leq C \int |P_2(x,D)u + C_\nu(x,D')u|^2 \exp 2\tau\phi\, dx.$$

C'est une conséquence facile de la preuve de la Proposition 2.2.. Il y donc "perte de deux dérivées" par rapport à la perturbation $C_\nu(x,D')$ qui est d'ordre 4. □

Remarque 2.5. La fonction ϕ de la Proposition 2.2. dépend de la

seule variable x_n lorsque $x_n < h$. La valeur de h est fixée uniquement en fonction du symbole $p_2(x,\xi) = \xi_n^2 + r_2(x,\xi')$, de sorte que (2.41) ait un sens. Néanmoins, comme le montrent les exemples 2 et 6 du paragraphe 1.4, cette restriction sur h donc sur x_n peut s'avérer inutile. □

2.4. - Perturbation d'opérateur elliptique-hyperbolique et inégalité de Carleman (II).

D'après (2.31)-(2.34), les coefficients de $B_\nu(x,D')$ et $C_\nu(x,D')$ sont seulement continus en $x_n \in \mathbb{R}$ (les coefficients de B_ν et C_ν sont réguliers seulement lorsque $x_n < 0$).

Pour pallier à cette restriction, il convient de modifier les hypothèses (2.31)-(2.34) sur B_ν et C_ν.

A cet effet, soit $\tilde{\theta} : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R} : x_n \to \tilde{\theta}(x_n)$ une fonction de classe C^∞, décroissante et pour laquelle $0 \leq \theta \leq 1$. On suppose de plus $\tilde{\theta}$ plate en 0 de sorte qu'en prolongeant $\tilde{\theta}$ par 0 lorsque $x_n > 0$, la fonction obtenue est C^∞ sur $\mathbb{R}$, toujours décroissante et satisfaisant $0 \leq \theta \leq 1$. Son support est la demi-droite fermée $x_n \leq 0$. Une telle fonction sera désignée par θ dans ce qui suit. Citons, à titre d'exemple la fonction $\theta(x_n) = 0$ si $x_n > 0$, $\theta(x_n) = \exp \frac{1}{x_n}$ si $x_n < 0$.

Voici les hypothèses pour B_ν, C_ν.

(2.55) $B_\nu(x,D') = \nu\, \theta(x_n)\, B(x',D')$ et $C_\nu(x,D') = -\nu\, \theta(x_n) C(x',D')$ où les opérateurs B,C, indépendants de ν et x_n, à coefficients réels et réguliers.

(2.56) $B(x',D')$ est un opérateur tangentiel d'ordre 2 auto-adjoint

dont le symbole satisfait $b(x',\xi') > 0$.

(2.57) $C(x',D')$ est un opérateur tangentiel d'ordre 4, auto-adjoint dont le symbole satisfait $c(x',\xi') > 0$.

Puisque $\theta'(x_n) < 0$ lorsque $x_n < 0$, il en résulte une forme affaiblie de (2.32)-(2.34), si $r_2(x,\xi')$ satisfait (2.10).

(2.58) $\frac{\partial^k}{\partial x_n^k} b_\nu(x',0,\xi') \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}$ et $\frac{\partial}{\partial x_n} b_\nu(x,\xi') < 0$ pour $x_n < 0$.

(2.59) $\frac{\partial^k}{\partial x_n^k} c_\nu(x',0,\xi') \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}$ et $\frac{\partial}{\partial x_n} c_\nu(x,\xi') > 0$ pour $x_n < 0$.

(2.60) $-\frac{\partial}{\partial x_n} c_\nu(x,\xi') + 2r_2(x,\xi') b_\nu(x,\xi') < -C_K\, \theta(x_n)(1+|\xi'|^2)^2$

pour $x_n \leq 0$ pour x décrivant tout compact K.

Sous ces hypothèses, les propositions 2.2 et 2.3. sont reformulées ainsi :

Proposition 2.4. Soit $P(x,D) = D_n^2 + R_2(x,D) + R_1(x,D)$ un opérateur différentiel d'ordre ≤ 2. On suppose $R_2(x,D')$ auto-adjoint de symbole vérifiant (2.10) et les coefficients de $R_1(x,D)$ appartenant à $L^\infty(\Omega)$. Soient $B_\nu(x,D')$, $C_\nu(x,D')$ satisfaisant (2.55)-(2.57) et $K_\nu(x,D') = B_\nu(x,D') - 2i\, B_\nu(x,D')\, D_n$. Alors il existe une fonction ϕ satisfaisant (2.35) et une constante $C > 0$ telles que :

---

(1) $B_\nu(x,D'), C_\nu(x,D')$ sont les opérateurs de symbole $b_\nu(x,\xi')$ $c_\nu(x,\xi')$.

$$(2.61)\quad \tau^3 \int |u|^2 \exp 2\tau\phi dx + \tau \sum_1^n \int |D_j u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx$$

$$+ \nu\tau \sum_{j,k=1}^{n-1} \int_{x_n<0} \theta(x_n) |D^2_{jk} u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx$$

$$+ \nu\tau^3 \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_n<0} \theta(x_n) |D_j u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx$$

$$+ \nu\tau \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_n<0} \theta(x_n) |D_j D_n u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx$$

$$+ \nu^2\tau \sum_{j,k,\ell=1}^{n-1} \int_{x_n<0} \theta^2(x_n) |D^3_{jk\ell} u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx$$

$$\leq C \int |P_2(x,D)v + K_\nu(x,D')v|^2 \exp 2\tau\phi \, dx.$$

pour $\tau \geq \tau_0$, $0 < \nu \leq \nu_0$ et quelle que soit $u \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Preuve : C'est une modification simple de la preuve de la Proposition 2.2. Après partition de l'unité, les points A) et C) sont inchangés. Pour le point B), il suffit de modifier convenablement les inégalités (2.45)-(2.48), utilisant à présent (2.55)-(2.60). L'inégalité (2.49) et sans objet car $\frac{\partial}{\partial x_n} B_\nu(x',0,D') \equiv 0$ d'après (2.58). Les inégalités (2.50) et (2.51) sont inchangées car elles invoquent uniquement la continuité des opérateurs $B_\nu(x,D')$ et $\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} B_\nu(x,D')$. On utilise toujours une fonction $\phi = \phi(x_n)$ satisfaisant (2.35), strictement décroissante et convexe.

□

Remarque 2.5. bis - La remarque 2.5. est toujours valable.

□

III - ESTIMATIONS, EXISTENCE ET APPROXIMATION DANS $H^{m,s}$

3.1. - Estimations dans $H^{m,s}$ pour une perturbation d'opérateur elliptique-hyperbolique (I).

L'inégalité de Carleman de la Proposition 2.3. va être utilisée pour obtenir l'analogue de la Proposition 1.3. La perturbation $K_\nu(x,D)$, à support dans le demi-espace $x_n < 0$, nécessite l'introduction des espaces de Sobolev $H^{m,s}$ (cf. Hörmander [5], Dieudonné [22]) et les techniques de régularisation associées.

Etant donnés deux nombres réels quelconques m, s, il est d'usage de désigner par $H^{m,s}$ (ou $H^{m,s}(\mathbb{R}^n)$) l'espace vectoriel des distributions tempérées telles que la distribution $\hat{u}$ soit une fonction localement intégrable et pour laquelle la fonction

$$\xi \to (1 + |\xi|^2)^m (1 + |\xi'|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2$$

soit intégrable dans $\mathbb{R}^n$; on a posé $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Il s'agit là d'un espace hilbertien séparable (généralisant les espaces de Sobolev H^m) dont le produit scalaire et la norme sont donnés par les formules :

$$(3.1)\quad (u,v)_{m,s} = (2\pi)^{-n} \int (1 + |\xi|^2)^m (1 + |\xi'|^2)^s \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi$$

$$(3.2)\quad \|u\|^2_{m,s} = (2\pi)^{-n} \int (1 + |\xi|^2)^m (1 + |\xi'|^2)^s \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Si $\mathbb{R}^+_n$ désigne le demi-espace ouvert de $\mathbb{R}^n$ défini par $x_n > 0$, les distributions u de $H^{m,s}$ a support dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ constituent un sous espace fermé de $H^{m,s}$ noté $\overset{\circ}{H}{}^{m,s}(\mathbb{R}^n_+)$. Lorsque u décrit $H^{m,s}$, la restriction $u_{\mathbb{R}^n_-}$ de u à $\mathbb{R}^n_-$ décrit un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_-)$, noté $H^{m,s}(\mathbb{R}^n_-)$, isomorphe à l'espace quotient $H^{m,s} / \overset{\circ}{H}{}^{m,s}(\mathbb{R}^n_+)$. Il est muni de la topologie d'espace de Banach définie par la norme

$$(3.3)\quad \|u\|_{m,s} = \inf \|U\|_{m,s}.$$

où U parcourt l'ensemble des distributions de $H^{m,s}$ telles que $U = u$ dans $\mathbb{R}^n_-$ i.e. $U_{\mathbb{R}^n_-} = u$.

Lorsque $m = s = 0$, on a évidemment $H^{0,0}(\mathbb{R}^n_-) = L^2(\mathbb{R}^n_-)$.

Notons les caractérisations suivantes de $H^{m,s}(\mathbb{R}^n_-)$, lorsque m est un entier (Hörmander [5], Dieudonné [2]).

Proposition 3.1. Soient $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes[1].

$$(3.4)\quad u \in H^{m,s}(\mathbb{R}^n_-).$$

$$(3.5)\quad u \in H^{m-1,s+1}(\mathbb{R}^n_-)\ ,\ D_n u \in H^{m-1,s}(\mathbb{R}^n_-).$$

$$(3.6)\quad u \in H^{m,s-1}(\mathbb{R}^n_-)\ ,\ D_j u \in H^{m,s-1}(\mathbb{R}^n_-) \quad 1 \le j < n$$

(1) la norme $\|\ \|_{m,s}$ est définie par (3.3).

De plus, si $u \in H^{m,s}(\mathbb{R}^n_-)$

$$(3.7)\quad \frac{1}{2}\|u\|^2_{m,s} \le \|u\|^2_{m-1,s+1} + \|D_n u\|^2_{m-1,s} \le \|u\|^2_{m,s}$$

$$(3.8)\quad \|u\|^2_{m,s} = \|u\|^2_{m,s-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \|D_j u\|^2_{m,s-1}$$

Si u appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_-)$, on désigne par $\hat{u}_n$ sa transformée de Fourier partielle, par rapport aux variables $x_1,\dots,x_{n-1}$.

Proposition 3.2 Soient $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$. Alors $H^{m,s}(\mathbb{R}^n_-)$ est l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n_-$ telles que :

$$(3.9)\quad D_n^j \hat{u}_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n_-)$$

$$(3.10)\quad \Big(\sum_{j=0}^{m-1} (2\pi)^{1-n} \int_{-\infty}^{0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\xi'|^2)^{s+m-j} |D_n^j \hat{u}_n(\xi', x_n)|^2 \, d\xi' \, dx_n\Big)^{1/2} < +\infty .$$

De plus, (3.10) définit une norme équivalente à (3.3). En particulier

$$(3.11)\quad H^{m,0}(\mathbb{R}^n_-) = H^m(\mathbb{R}^n_-).$$

Compte tenu de (3.10), lorsque m est entier, on notera encore :

$$(3.12)\quad \|u\|^2_{m,s;U_0^h} = (2\pi)^{1-n} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{-\infty}^{0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\xi'|^2)^{s+m-j} |D_n^j \hat{u}_n(\xi', x_n)|^2 \, d\xi' \, dx_n .$$

Ceci dit, nous pouvons énoncer le premier résultat de ce paragraphe.

On notera $U_h^- = \{x \in R^n \mid x_n < h\}$ et $\Omega_h^- = \Omega \cap U_h^-$ pour $h \in R$.

Théorème 3.1. Soit $P(x,D) = D_n^2 + R_2(x, D') + R_1(x, D)$ un opérateur différentiel d'ordre ≤ 2 à coefficients réels et C^∞. On suppose que $R_2(x, D)$ satisfait (2.10).

Soit $K_\nu(x, D) = C_\nu(x,D') - 2i B_\nu(x,D') D_n$ pour C_ν, B_ν à coefficients réels et C^∞ en x' lorsque $x_n < 0$. On suppose que B_ν et C_ν satisfont (2.31) et (2.34).

Alors il existe un réel h avec $0 < h \leq h_0$, tel que si $s \in \mathbb{R}$ et si K est un compact de $\{x \mid x_n < h\}$, il existe une constante $C_{s,K}$ et une fonction $\phi = \phi(x_n)$ satisfaisant (2.35) pour lesquelles :

$$
\begin{aligned}
(3.13)\quad & \tau \sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{-\infty}^{h} \|D^\alpha u(x_n)\|_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n \\
& + \nu\tau \sum_{|\alpha'|\leq 2} \int_{-\infty}^{0} \|D^{\alpha'} u(x_n)\|_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n \\
& + \nu\tau \sum_{|\alpha'|\leq 1} \int_{-\infty}^{0} (-x_n)\|D^{\alpha'} D_n u(x_n)\|_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n \\
& + \nu^2\tau \sum_{|\alpha'|\leq 3} \int_{-\infty}^{0} x_n^2 \|D^{\alpha'} u(x_n)\|_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n \\
& \leq C_{s,K} \int_{-\infty}^{h} \|(P + K_\nu) u(x_n)\|_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n .
\end{aligned}
$$

quelle que soit u appartenant à $\mathcal{D}(K)$ et pour $\tau \geq \tau_0$, $0 < \nu \leq 1$. $C_{s,K}$ est une constante dépendant

de s et K mais pas de u et ν ; $||w(x_n)||_s$ désigne la norme dans $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ de la fonction $x' \to w(x', x_n)$ pour x_n fixé.

Preuve : Elle utilise la Proposition 2.3, c'est-à-dire l'inégalité (2.36) avec $P(x,D)$ au lieu de $P_2(x,D)$. Pour $h > 0$ assez petit, les fonctions u seront de classe C^∞ et à support compact dans $\Omega \cap \{x \mid x_n < h\}$, en sorte que (cf. Remarque 2.5) la fonction ϕ dépendra de la seule variable x_n.

A. - On suppose tout d'abord $s < 0$.

Soit $\Omega' \subset\subset \Omega_h^-$ un voisinage ouvert de K ; quitte à multiplier les coefficients de $P(x,D) + K_\nu(x,D)$ par une fonction de $\mathcal{D}(\Omega_h^-)$ valant 1 dans Ω', ceux-ci appartiennent à $\mathcal{D}(\Omega_h^-)$. Soit $\psi_\varepsilon(x') = \varepsilon^{1-n}\psi(\frac{x'}{\varepsilon})$ avec $\psi = \Delta_{x'}\chi$ pour $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ et telle que $K + \varepsilon \operatorname{supp}\psi \subset \Omega'$, lorsque $0 \le \varepsilon \le 1$; comme $\operatorname{supp} u \subset K$, la fonction $J'_\varepsilon u = u * \psi_\varepsilon\, dx' = u *' \psi_\varepsilon$ (où dx' est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n-1}$) appartient à $\mathcal{D}(\Omega')$ et satisfait donc (2.46) dans les conditions indiquées ci-dessus. On définit naturellement l'équivalent tangentiel de la norme (1.33) en y remplaçant $|\xi|^2$ par $|\xi'|^2$; il en résulte (1.34) et (1.35) avec $J'_\varepsilon u$ au lieu de $J_\varepsilon u = u * \psi_\varepsilon$. Lorsque $\delta \to 0$, nous obtenons ainsi (Corollaire 2.42 de [5]), pour toute fonction $a \in \mathcal{P}$

$$(3.14)\quad \int_0^1 ||a(w * \psi_\varepsilon) - (aw) * \psi_\varepsilon||_0^2\ \varepsilon^{-2s}\ \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \le \gamma_1\ ||w||_{s-1}^2$$

quelle que soit $w \in H^{s-1}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Si de plus $\hat{\psi}(o) = \int \psi(x')\, dx' = 1$, nous obtenons (Corollaire 2.4.1 de [5]) lorsque $s < o$:

$$(3.15)\quad \gamma_2 \|w\|_s^2 \leq \int_o^1 \|w *' \psi_\varepsilon\|_o^2\, \varepsilon^{-2s} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \leq \gamma_3 \|w\|_s^2$$

quelle que soit $w \in H^s(R^{n-1})$.

De (2.36), on déduit donc aisément, pour $0 < \nu \leq 1$ et $\tau \geq 1$:

$$(3.16)\quad \tau \sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{x_n<h} |D^\alpha u|^2 \exp 2\tau\phi\, dx + \nu\tau \sum_{|\alpha'|\leq 2} \int_{x_n<0} |D^{\alpha'} u|^2 \exp 2\tau\phi\, dx$$

$$+ \nu\tau \sum_{|\alpha'|\leq 1} \int_{x_n<0} (-x_n) |D^{\alpha'} D_n u|^2 \exp 2\tau\phi\, dx$$

$$+ \nu^2 \tau \sum_{|\alpha'|\leq 3} \int_{x_n<0} x_n^2 |D^{\alpha'} u|^2 \exp 2\tau\phi\, dx$$

$$\leq C_K \int_{x_n<h} |P(x,D)u + K_\nu(x,D)u|^2 \exp 2\tau\phi\, dx$$

où $\phi = \phi(x_n)$, u appartient à $\mathcal{D}(K)$ et la constante C_K dépends de K.

En multipliant membre à membre cette inégalité par $\varepsilon^{-2s} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$, après y avoir remplacé u par $J'_\varepsilon u$, puis en intégrant en ε de 0 à 1, il vient grâce à (3.15) :

$$(3.17)\quad \tau \sum_{|\alpha|\le 1} \int_{-\infty}^{h} ||D^{\alpha} u^{\sim}(x_n)||_s^2 \exp 2\tau\phi\ (x_n)\, dx_n$$

$$+ \nu\tau \sum_{|\alpha'|\le 2} \int_{-\infty}^{0} ||D^{\alpha'} u\ (x_n)||_s^2 \exp 2\tau\phi\ (x_n)\ dx_n$$

$$+ \nu\tau \sum_{|\alpha'|\le 1} \int_{-\infty}^{0} (-x_n)\ ||D^{\alpha'} D_n\ u\ (x_n)||_s^2 \exp 2\tau\phi\ (x_n)\ dx_n$$

$$+ \nu^2\tau \sum_{|\alpha'|\le 3} \int_{-\infty}^{0} x_n^2\ ||D^{\alpha'} u(x_n)||_s^2 \exp 2\tau\phi\ (x_n)\ dx_n$$

$$\le C_K \int_0^1 \int_{x_n<h} |(P(x,D) + K_\nu(x,D))\ J'_\varepsilon\ u|^2 \exp 2\tau\phi\ (x_n)\ dx\ \varepsilon^{-2s}\ \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Après commutation de $P(x,D) + K_\nu\ (x,D) = D_n^2 + R_2\ (x,D') + R_1\ (x,D) + \nu C\ (x,D') - 2i\nu\ B\ (x,D')\ D_n$ avec J'_ε, nous obtenons l'identité :

$$(3.18)\quad (P(x,D) + K_\nu\ (x,D))\ J'_\varepsilon u = J'_\varepsilon\ (P(x,D)u + K_\nu(x,D)u)$$

$$+ ([R_2\ (x,D'),\ J'_\varepsilon]$$

$$+ [R_1(x,D),\ J'_\varepsilon] + \nu\ [C(x,D'),\ J'_\varepsilon]$$

$$- 2i\nu\ [B(x,D'),\ J'_\varepsilon]\ D_n)\ u\ .$$

D'après (3.15), il vient, en posant $f(x) = (P(x,D) + K_\nu\ (x,D))u(x)$

$$(3.19)\quad \int_0^1 \int |J'_\varepsilon\ (P(x,D)\ u + K_\nu\ (x,D)u)|^2\ \varepsilon^{-2s}\ dx'\ \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\le\ \gamma_1\ ||f\ (x_n)||^2\ .$$

Les coefficients de P appartiennent à $\mathcal{D}(\Omega_n^-)$; ceux de K_ν sont C^∞ en x' lorsque $x_n < 0$. D'après (3.13), tous les opérateurs considérés étant différentiels, et avec (2.31)-(2.33), il vient aisément :

$$(3.20)\quad \int_0^1 \int |[R_2(x,D') + R_1(x,D),\ J'_\varepsilon]\, u|^2\, \varepsilon^{-2s}\, dx'\, \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \leq \gamma \sum_{|\alpha|\leq 1} ||D^\alpha u\,(x_n)||_s^2$$

$$(3.21)\quad \int_0^1 \int |\nu\,[C(x,D'),J'_\varepsilon]\, u|^2\, \varepsilon^{-2s}\, dx'\, \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \leq \nu^2 \gamma \sum_{|\alpha'|\leq 3} ||x_n\, D^{\alpha'} u\,(x_n)||_2^2$$

$$(3.22)\quad \int_0^1 \int |-2i\nu\,[B\,(x,D'),\ J'_\varepsilon]\, D_n\, u|^2\, \varepsilon^{-2s}\, dx'\, \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \leq \nu^2 \delta \sum_{|\alpha'|\leq 1} ||x_n\, D^{\alpha'}\, D_n\, u\,(x_n)||_s^2 \ .$$

les majorations (3.21), (3.22) valant pour $x_n < 0$. Lorsque $x_n > 0$ les crochets $[C(x,D'),\ J'_\varepsilon]$ et $[B(x,D'),\ J'_\varepsilon]$ sont en effet identiquement nuls.

Le membre de droite de (3.17) est alors majoré, grâce à (3.18)-(3.21) et puisque $0 < \nu \leq 1$, par :

$$(3.22)\quad \gamma_1 \int_{-\infty}^{h} ||f\,(x_n)||_s^2 \exp 2\tau\phi\,(x_n)\, dx_n + \gamma \sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{-\infty}^{h} ||D^\alpha u\,(x_n)||_s^2 \exp 2\tau\phi\,(x_n)\, dx_n + \nu^2\gamma \sum_{|\alpha'|\leq 3} \int_{-\infty}^{0} x_n^2\, ||D^{\alpha'} u\,(x_n)||_s^2 \exp 2\tau\phi\,(x_n)\, dx_n$$

$$+ \nu' \gamma_K \sum_{|\alpha'|\le 1} \int_{-\infty}^{0} (-x_n) \, \| D^{\alpha'} D_n u \, (x_n) \|_s^2 \exp 2\tau\phi \, (x_n) \, dx_n .$$

Il en résulte, pour τ assez grand :

$$(3.23) \quad \tau \sum_{|\alpha|\le 1} \int_{-\infty}^{h} \| D^{\alpha} u \, (x_n) \|_s^2 \exp 2\tau\phi \, (x_n) \, dx_n$$

$$+ \nu\tau \sum_{|\alpha'|\le 2} \int_{-\infty}^{0} \| D^{\alpha'} u \, (x_n) \|_s^2 \exp 2\tau\phi \, (x_n) \, dx_n$$

$$+ \nu\tau \sum_{|\alpha'|\le 1} \int_{-\infty}^{0} (-x_n) \, \| D^{\alpha'} D_n u \, (x_n) \|_s^2 \exp 2\tau\phi \, (x_n) \, dx_n$$

$$+ \nu^2\tau \sum_{|\alpha'|\le 3} \int_{-\infty}^{0} x_n^2 \, \| D^{\alpha'} u \, (x_n) \|_s^2 \exp 2\tau\phi \, (x_n) \, dx_n$$

$$\le C_K \int_{-\infty}^{h} \| f \, (x_n) \|_s^2 \exp 2\tau\phi \, (x_n) \, dx_n .$$

B. - L'inégalité précédente (3.23) est valable lorsque $s < 0$.

Etablissons la pour $s \in \mathbb{R}$, en montrant que l'on peut y remplacer s par $s + 1$.

A cet effet, remplaçons u par $D_j u$, pour $j = 1,\ldots,n-1$, dans (3.23) ; alors f est remplacé par $(P(x,D) + K_\nu(x,D)) \, D_j u$. On note :

$$(3.24) \quad (P \, (x,D) + K_\nu \, (x,D)) \, D_j u = D_j f + [P(x,D) + K_\nu \, (x,D), D_j] u$$

pour $j = 1,\ldots,n-1$ de sorte qu'il suffit de majorer le crochet.

Pour cela, d'après l'expression de $P(x,D) + K_\nu(x,D)$, pour $j = 1,,\ldots, n-1$:

$$(3.25)\quad [P(x,D) + K_\nu(x,D), D_j I = [R_2(x,D') + R_1(x,D), D_j I + \nu\,[C(x,D'), D_j I - 2i\nu\,[B(x,D'), D_j I\, D_n .$$

Si $Q(x,D)$ est un opérateur différentiel, il en est de même de $[Q(x,D), D_j I$ dont l'ordre est celui de Q. De plus $\|D_j w(x_n)\|_s^2 \le \|w(x_n)\|_{s+1}^2$.

De l'expression (3.25), qui ne comporte pas de termes D_n^2, et des propriétés (2.31)-(2.33), on déduit donc la majoration ($0<\nu\le 1$ et $x = (x', x_n) \in K$) :

$$\begin{aligned}(3.26)\quad &\int_{-\infty}^{h} \|[P(x,D) + K_\nu(x,D), D_j I\, u\|_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n \\ &\le C_{j,K}\Big(\sum_{|\alpha|\le 1}\int_{-\infty}^{h} \|D^\alpha u(x_n)\|_{s+1}^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n \\ &\quad + \nu^2 \sum_{|\alpha'|\le 3}\int_{-\infty}^{0} x_n^2 \|D^{\alpha'} u(x_n)\|_{s+1}^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n \\ &\quad + \nu \sum_{|\alpha'|\le 1}\int_{-\infty}^{0}(-x_n) \|D^{\alpha'} D_n u(x_n)\|_{s+1}^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n\Big) \\ &\quad \equiv C_{j,K}\, U\end{aligned}$$

pour $j = 1,\ldots,n-1$.

On additionne alors (3.23) et les $n-1$ inégalités obtenues en y substituant $D_j u$; à l'aide de (3.24)-(3.26) et puisque $\|w(x_n)\|_{s+1}^2 = \|w(x_n)\|_s^2 + \sum_1^{n-1} \|D_j w(x_n)\|_s^2$, il vient :

$$(3.27)\quad \tau \sum_{|\alpha|\le 1} \int_{-\infty}^{h} ||D^{\alpha} u\,(x_n)||^2_{s+1} \exp 2\tau\phi\,(x_n)\,dx_n$$

$$+ \nu\tau \sum_{|\alpha'|\le 2} \int_{-\infty}^{0} ||D^{\alpha'} u\,(x_n)||^2_{s+1} \exp 2\tau\phi\,(x_n)\,dx_n$$

$$+ \nu\tau \sum_{|\alpha'|\le 1} \int_{-\infty}^{0} (-x_n)\,||D^{\alpha'} D_n u\,(x_n)||^2_{s+1} \exp 2\tau\phi\,(x_n)\,dx_n$$

$$+ \nu^2\tau \sum_{|\alpha'|\le 3} \int_{-\infty}^{0} x_n^2\,||D^{\alpha'} u(x_n)||^2_{s+3} \exp 2\tau\phi\,(x_n)\,dx_n$$

$$\le C_K \sum_{1}^{n-1} \int_{-\infty}^{h} ||D_j f(x_n)||^2_{s+1} \exp 2\tau\phi\,(x_n)\,dx_n + C'_K\,U\,.$$

Choisissant $\tau > 2\,C'_K$, nous déduisons de (3.27) l'inégalité (3.23) avec s remplacé par $s+1$, ce qui achève la preuve.

□

Du Théorème 3.1., nous déduisons le :

Corollaire 3.1. - Les hypothèses sont celles du Théorème 3.1. Alors il existe un réel h avec $0<h\le h_o$ tel que, si K est un compact de $U_h^- = \{x \mid x_n < h\}$, il existe une constante $C_{s,K,\tau}$ pour laquelle :

$$(3.28)\quad ||u||^2_{1,s,U_h^-} + \nu\,||u||^2_{0,s+2;U_o^-}$$

$$+ \nu \sum_{|\alpha'|\le 1} \int_{-\infty}^{0} (-x_n)\,||D^{\alpha'} D_n\,u\,(x_n)||^2_s\,dx_n$$

$$+ \nu^2 \sum_{|\alpha'|\leq 3} \int_{-\infty}^{0} x_n^2 \, ||D^{\alpha'} u(x_n)||_s^2 \, dx_n$$

$$\leq C_{s,K,\tau} \, ||P(x,D)\, u + K_\nu(x,D)\, u||^2_{0,s,U_n^-}$$

quelle que soit u appartenant à $\mathcal{D}(K)$ et pour $0<\nu\leq 1$. Dans (3.28) $C_{s,K,\tau}$ est une constante indépendante de u et ν, $||w||_{m,s,U^-}$ désigne la norme de $H^{m,s}(U^-)$ et $||w(x_n)||_s$ la norme $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ de $x' \to w(x', x_n)$, x_n fixé.

3.2. - Estimations dans $H^{m,s}$ pour une perturbation d'opérateurs elliptique-hyperbolique (II).

Les résultats du Théorème 3.1. et du Corollaire 3.1. peuvent être améliorés lorsque les coefficients de $B_\nu(x,D')$, $C_\nu(x,D')$ sont C^∞.

Théorème 3.2. - Soit $P(x,D) = D_n^2 + R_2(x,D') + R_1(x,D)$ un opérateur différentiel d'ordre ≤ 2 à coefficients réels et C^∞. On suppose que $R_2(x,D')$ satisfait (2.10).

Soit $K_\nu(x,D') = C_\nu(x,D') - 2i\, B_\nu(x,D')\, D_n$ pour C_ν, B_ν à coefficients réels et C^∞ et satisfaisant (2.55)-(2.57). Alors il existe un réel h avec $0 < h \leq h_0$ tel que si $s \in \mathbb{R}$ et si K est un compact de $\{x \mid x_n < h\}$, il existe une constante $C_{s,K}$ et une fonction $\phi = \phi(x_n)$ satisfaisant (2.35) pour lesquelles :

$$(3.29)\quad \tau \sum_{|\alpha|\le 1} \int_{-\infty}^{h} \|D^{\alpha} u(x_n)\|_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n$$

$$+ \nu\tau \sum_{|\alpha'|\le 2} \int_{-\infty}^{0} \theta(x_n) \|D^{\alpha'} u(x_n)\|_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n$$

$$+ \nu\tau \sum_{|\alpha'|\le 1} \int_{-\infty}^{0} \theta(x_n) \|D^{\alpha'} D_n u(x_n)\|_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n$$

$$+ \nu^2\tau \sum_{|\alpha'|\le 3} \int_{-\infty}^{0} \theta(x_n)^2 \|D^{\alpha'} u(x_n)\|_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n$$

$$\le C_{s,K} \int_{-\infty}^{h} \|(Pu + K_\nu u)(x_n)\|_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n .$$

quelle que soit u appartenant à $\mathcal{D}(K)$ et pour $\tau \ge \tau_0$, $0 < \nu \le 1$. Dans (3.29), $C_{s,K}$ est une constante dépendant de s et K mais pas de ν et u.

Preuve : Elle procède de la même façon que pour le Théorème 3.1., mais utilise cette fois l'inégalité (2.61) de la Proposition 2.4. ; on effectue par ailleurs une récurrence sur s et sur k.

A. - On démontre tout d'abord (3.29) pour $s < 0$.

De (2.51), on déduit pour $0 < \nu \le 1$ et $\tau \ge 1$:

$$(3.30)\quad \tau \sum_{|\alpha|\le 1} \int_{x_n<h} |D^\alpha u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx$$

$$+ \nu\tau \sum_{|\alpha'|\le 2} \int_{x_n<0} \theta(x_n) \, |D^{\alpha'} u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx$$

$$+ \nu\tau \sum_{|\alpha'|\le 1} \int_{x_n<0} \theta(x_n) \, |D^{\alpha'} D_n u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx$$

$$+ \nu^2\tau \sum_{|\alpha'|\le 3} \int_{x_n<0} \theta^2(x_n) \, |D^{\alpha'} u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx$$

$$\le C_K \int_{x_n<h} |P(x,D)\, u + K_\nu(x,D)\, u|^2 \exp 2\tau\phi \, dx ,$$

où $\phi = \phi(x_n)$ si h est assez petit, u appartient à $\mathcal{D}(K)$ et la constante C_K dépends de K.

Appliquant alors le procédé de régularisation de la preuve du Théorème 3.1. (point A), on en déduit de façon identique (puisque $\phi = \phi(x_n)$), pour $f(x) = (P(x,D) + K_\nu(x,D))\, u(x)$:

$$(3.31)\quad \tau \sum_{|\alpha|\le 1} \int_{-\infty}^{h} ||D^\alpha u(x_n)||_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n) \, dx_n$$

$$+ \nu\tau \sum_{|\alpha'|\le 2} \int_{-\infty}^{0} \theta(x_n) \, ||D^{\alpha'} u(x_n)||_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n) \, dx_n$$

$$+ \nu\tau \sum_{|\alpha'|\le 1} \int_{-\infty}^{0} \theta(x_n) \, ||D^{\alpha'} D_n u(x_n)||_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n) \, dx_n$$

$$+ \nu^2\tau \sum_{|\alpha'|\le 3} \int_{-\infty}^{0} \theta^2(x_n) \, ||D^{\alpha'} u(x_n)||_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n) \, dx_n$$

$$\leq C_K \int_{-\infty}^{h} |||f(x_n)|||_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n .$$

B. - L'inégalité (3.29) de l'énoncé est démontrée pour tout $s \in \mathbb{R}$ par récurrence. Il suffit de montrer que si (3.29) a lieu pour s c'est encore le cas pour $s+1$.

A cet effet, remplaçons u par $D_j u$, $j = 1,\ldots,n-1$ dans (3.29) ; f est remplacé par $(P(x,D) + K_\nu(x,D))\, D_j u$. Puisque

$$(3.32)\quad (P(x,D) + K_\nu(x,D))\, D_j u = D_j f + [P(x,D) + K_\nu(x,D), D_j]\, u$$

$$1 \leq j \leq n-1$$

il s'agit de majorer le crochet. Pour C_ν, B_ν satisfaisant (2.65)-(2.67), et d'après l'expression de $P(x,D) + K_\nu(x,D)$:

$$(3.33)\quad [P(x,D) + K_\nu(x,D),\, D_j] = [R_2(x,D') + R_1(x,D),\, D_j]$$

$$- \nu\, \theta(x_n)\, [C(x';D'),\, D_j] - 2i\nu\, \theta(x_n)\, [B(x',D'), D_j]\, D_n$$

$$\text{pour } j = 1,\ldots,n-1 .$$

Si $Q(x,D)$ est un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients C^∞, $[Q(x,D), D_j]$ $j = 1,\ldots,n-1$ est encore un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients C^∞. D'autre part, le membre de droite de (3.33) ne contient pas de dérivées d'ordre 2 par rapport à x_n. Utilisant ces deux remarques, compte tenu de (2.55)-(2.57), et puisque $|||D_j w|||_s^2 \leq |||w|||_{s+1}^2$ $j=1,\ldots,n-1$, il existe des constantes $C_{j,K}$ telles que :

$$(3.34)\quad \int_{-\infty}^{h} \left[\left[D^{\alpha}\left[P(x,D) + K_{\nu}(x,D),\ D_j\right] u\right]\right]_s^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n$$

$$\leq C_{j,K}\Big(\sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{-\infty}^{h} \left[\left[D^{\alpha} u(x_n)\right]\right]_{s+1}^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n$$

$$+ \nu \sum_{|\alpha'|\leq 3} \int_{-\infty}^{0} \theta^2(x_n) \left[\left[D^{\alpha'} u(x_n)\right]\right]_{s+1}^2 \exp 2\tau\phi(x_n)\, dx_n$$

$$+ \nu^2 \sum_{|\alpha'|\leq 1} \int_{-\infty}^{0} \theta(x_n) \left[\left[D^{\alpha'} D_n u(x_n)\right]\right]_{s+1}^2 \exp 2\tau\phi(x_n) dx_n\Big)$$

$$\equiv C_{j,K}\ U$$

pour $j = 1,\ldots,n-1$, en notant que $0 \leq \theta(x_n) < 1$ et $0 < \nu \leq 1$.

Grâce à (3.32)-(3.34) et comme

$\left[\left[w(x_n)\right]\right]_{s+1}^2 = \left[\left[w(x_n)\right]\right]_s^2 + \sum_{1}^{n-1} \left[\left[D_j w(x_n)\right]\right]_s^2$, la preuve s'achève alors en additionnant (3.31) et les $n-1$ inégalités obtenues en y substituant $D_j u$ $(j=1,\ldots,n-1)$ et choisissant τ assez grand.

□

Du Théorème 3.2., nous déduisons le :

Corollaire 3.2. Les hypothèses sont celles du Théorème 3.2. Alors il existe un réel h avec $0<h\leq h_0$ tel que si $s \in \mathbb{R}$ et si K est un compact de $U_h^- = \{x \mid x_n < h\}$, il existe une constante $C_{s,K,\tau}$ pour laquelle :

$$(3.35)\quad |||u|||^2_{1,s;U_h^-} + \nu^2 N_{1,s+1}(u)^2 + \nu^2 N_{0,s+3}(u)^2 \leq C_{s,K,\tau} |||P(x,D)u + K_\nu(x,D)u|||^2_{0,s;U_h^-}$$

quelle que soit u appartenant à $\mathcal{D}(K)$ et pour $0 < \nu \leq 1$. $C_{s,K,\tau}$ est une constante indépendante de u et ν, $|||w|||_{1,s;U_h^-}$ désigne la norme de $H^{1,s}(U_h^-)$ et on a posé :

$$(3.36)\quad N_{m,s}(u) \equiv \left(\int_{-\infty}^{0} \theta^2(x_n) \sum_{j=0}^{m} |||D_n^j u(x_n)|||^2_{m+s-j}\, dx_n \right)^{1/2}$$

La perturbation $K_\nu(x,D)$ est un opérateur différentiel à coefficients C^∞. Utilisant l'hypoellipticité de l'opérateur $P(x,D) + K_\nu(x,D)$ par rapport à la variable x_n, nous en déduisons le principal résultat de ce paragraphe.

On désigne par $1+[\frac{k}{3}]$ la partie entière de $\frac{k}{3}$ si k est un entier, on note alors $|||u|||_{1+[\frac{k}{3}],s;U_h^-}$ la norme de u dans $H^{1+[\frac{k}{3}],s}(U_h^-)$ et on utilise la définition (3.36) pour énoncer le :

Théorème 3.3. - Les hypothèses sont celles du Théorème 3.2. Alors il existe un réel h avec $0 < h \leq h_o$ tel que si K est un compact de $U_h^- = \{x | x_n < h\}$, pour $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante C indépendante de u et ν pour laquelle :

$$(3.37)\quad |||u|||^2_{1+[\frac{k}{3}],s;U_h^-} + \nu^2 N_{1,s+k+1}(u)^2 + \nu^2 N_{0,s+k+3}(u)^2 \leq C\, |||P(x,D)u + K_\nu(x,D)u|||^2_{k,s;U_h^-}$$

quelle que soit u appartenant à $\mathfrak{D}(K)$ et pour $0 < \nu \leq 1$.

Preuve : Par hypothèse, nous pouvons appliquer le Corollaire 3.2. Remplaçant s par $s+k$ dans (3.35) et puisque $H^{k,s}(U_n^-) \subset H^{0,s+k}(U_n^-)$, il vient, pour $u \in \mathfrak{D}(K)$:

$$(3.38)\quad |||u|||^2_{1,s+k;U_n^-} + \nu^2 N_{1,s+k}(u)^2 + \nu^2 N_{0,s+k+3}(u)^2 \leq C\, |||P(x,D)u + K_\nu(x,D)u|||^2_{k,s;U_n^-}$$

Mais $D_n^2 u = P(x,D)u + K_\nu(x,D)u - R_2(x,D')u - C_\nu(x,D')u + 2i\, B_\nu(X,D')\, D_n u$, de sorte qu'à l'aide de (2.55)-(2.57) :

$$(3.39)\quad |||D_n^2 u|||^2_{k,s;U_n^-} \leq C\, \{|||P(x,D)u + K_\nu(x,D)u|||^2_{k,s;U_n^-} + |||u|||^2_{k,s+2;U_n^-} + \nu^2 |||u|||^2_{k+1,s+2,U_n^-} + \nu^2 |||u|||^2_{k,s+4;U_n^-}\}$$

Mais $H^{k+1,s+1}(U_n^-) \subset H^{k,s+2}(U_n^-)$ et d'après (3.7)

$|||u|||^2_{k+2,s} \leq 2\, |||u|||^2_{k+1,s+1} + |||D_n^2 u|||^2_{k,s}$, de sorte qu'avec (3.29) on a :

$$(3.40)\quad |||u|||^2_{k+2;s;U_n^-} \leq C\, \{|||P(x,D)u + K_\nu(x,D)u|||^2_{k,s;U_n^-} + |||u|||^2_{k+1,s+1;U_n^-} + \nu^2 |||u|||^2_{k+1,s+2;U_n^-} + \nu^2 |||u|||^2_{k,s+4;U_n^-}\}$$

Puisque $H^{k+1,s+1}(U_h^-)$, $H^{k+1,s+2}(U_h^-)$ et $H^{k,s+4}(U_h^-)$ contiennent $H^{k+1,s+3}(U_h^-)$, nous déduisons finalement de (3.40) pour $0 < \nu \leq 1$:

$$(3.41)\quad \|u\|^2_{k+2,s;U_h^-} \leq C \{ \|P(x,D)u + K_\nu(x,D)u\|^2_{k,s;U_h^-} + \|u\|^2_{k+1,s+3;U_h^-} \}.$$

Cette inégalité est itérée comme suit. Dans (3.41), substituons $k-j$ à k et $s+j-s_j$ à s, pour j entier compris entre 0 et k et s_j $j = 0,\ldots,k$ des réels positifs.

Puisque $H^{k,s}(U_h^-) \subset H^{k-j,s+j-s_j}(U_h^-)$, il vient :

$$(3.42)\quad \|u\|^2_{k+2-j,s+j-s_j} \leq C \{ \|P(x,D)u + K_\nu(x,D)u\|_{k,s} + \|u\|^2_{k+1,s+j-s_j+3} \}$$

où on n'a pas noté la dépendance en U_h^- pour alléger. Les réels s_j sont définis ainsi par récurrence :

$$\begin{aligned} s + j - s_j + 3 &= 5 + j + 1 - s_{j+1} \qquad 0 \leq j \leq k-1 \\ s + k - s_k + 3 &= s + k \end{aligned}$$

de sorte que $s_j = 2\ (k - j) + 3 \qquad 0 \leq j \leq k.$

Remplaçant s_j par cette valeur dans (3.42) puis effectuant la substitution de $k-j$ à j, il vient finalement :

$$(3.43)\quad \|u\|^2_{2+j,s+k-3(j+1)} \leq C \{ \|P(x,D)u + K_\nu(x,D)u\|^2_{k,s} + \|u\|^2_{j+1,s+k-3j} \}.$$

Additionnons les j égalités obtenues en faisant varier j de 0 à $k-1$ dans (3.43) ; compte tenu du choix de s_j, il reste :

$$(3.44)\quad |||u|||^2_{1+j,s+k-3j} \leq C \{|||P(x,D)u + K_\nu(x,D)u|||^2_{k,s} + |||u|||^2_{1,s+k}\}$$

On choisit alors $0 \leq j \leq k$ tel que $j = [\frac{k}{3}]$ et on utilise à nouveau (3.33) pour en déduire (3.37).

□

3.3. - Existence et approximation dans $H^{m,s}$

Les estimations des paragraphes 3.1. et 3.2. fournissent aisément par un argument de dualité des résultats d'existence d'une solution u_ν (à $\nu > 0$ fixé) du problème :

$$(3.45)\quad P(x,D)\,u + K_\nu(x,D)u = f.$$

On en déduit en même temps, une estimation indépendante de ν, de la norme de cette solution u_ν. Il en résulte, lorsque $\nu \to 0$, la convergence faible d'une suite $\{u_{\nu'}\}$, extraite de la suite $\{u_\nu\}$, vers une solution du problème :

$$(3.46)\quad P(x,D)\,u = f.$$

Bien entendu, ces résultats dépendent de la régularité des coefficients de la perturbation K_ν. On distingue donc deux cas selon que $K_\nu(x,D) = C_\nu(x,D) - 2i\,B_\nu(x,D')\,D_n$ satisfait les hypothèses (2.41)-(2.44) ou les hypothèses (2.65)-(2.67). Dans les deux cas l'opérateur $P(x,D) = D_n^2 + R_2(x,D') + R_1(x,D)$ sera à coefficients réels et C^∞ et on supposera que $R_2(x,D')$ satisfait (2.10). L'existence d'une solution u de (3.46) est alors assurée par la Proposition 1.5. du paragraphe 1.

On note toujours pour $h > 0$, $U_h^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n < h\}$ et on désigne, dans ce qui suit, par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant $\Omega \subset\subset U_h^-$.

Théorème 3.4. - Les hypothèses sont celles du Théorème 3.1. ; en particulier $K_\nu(x,D)$ satisfait les hypothèses (2.41)-(2.44). Soit h le réel défini par le Théorème 3.1.
Si $f \in H^{0,s}$, $s \in \mathbb{R}$, alors il existe u_ν appartenant à $H^{0,s}$, solution de (3.45) dans Ω et satisfaisant :

$$(3.47) \qquad \|u_\nu\|_{0,s} \leq C \|f\|_{0,s}$$

où C est une constante indépendante de ν.

Théorème 3.5. - Les hypothèses sont celles du Théorème 3.2., en particulier $K_\nu(x,D)$ satisfait les hypothèses (2.65)-(2.67).
Soit h le réel défini par le Théorème 3.2.
Si $f \in H^{k,s}$, $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, alors il existe u_ν appartenant à $H^{1+[\frac{k}{3}],s}$, solution de (3.45) dans Ω et satisfaisant :

$$(3.48) \qquad \|u_\nu\|_{1+[\frac{k}{3}],s} \leq C \|f\|_{k,s}$$

où C est une constante indépendante de ν.

Preuve des Théorèmes 3.4. et 3.5.

C'est un argument classique de dualité (Hörmander [5I]). On note que le dual de $H^{m,s}$ est $H^{-m,-s}$ et que les hypothèses des

Théorèmes 3.1. et 3.2. sont toujours satisfaites lorsqu'on remplace $P(x,D)$ par ${}^tP(x,D)$. On considère alors la forme linéaire :

$$(3.49) \qquad {}^tP(x,D)\,v \to (f,v) \qquad \text{où} \quad v \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

Par hypothèses, les Théorèmes 3.1. et 3.2. s'appliquent donc également (Corollaire 3.1. et le Théorème 3.3.). Utilisant alors (3.28), la forme linéaire (3.49) est continue, d'où grâce au théorème de Hahn Banach l'existence dans $H^{0,s}$ et l'estimation (3.47).

De même, utilisant (3.37) et l'hypoellipticité partielle de l'opérateur $P(x,D) + K_\nu(x,D)$ par rapport à la variable x_n, on en déduit (cf. preuve du Théorème 9.3.2. de [5]) l'existence dans $H^{1+[\frac{k}{3}],s}$ et l'estimation (3.48). □

Précisons les résultats de convergence.

Théorème 3.6. - Sous les hypothèses du Théorème 3.4., il existe une suite $\{u_{\nu'}\}_{\nu'>0}$, extraite de la suite $\{u_\nu\}_{\nu>0}$ qui converge faiblement dans $H^{0,s}$, lorsque $\nu \to 0$, vers une solution u du problème (3.46).

Théorème 3.7. - Sous les hypothèses du Théorème 3.5., il existe une suite $\{u_{\nu'}\}_{\nu'>0}$, extraite de la suite $\{u_\nu\}_{\nu>0}$ qui converge faiblement dans $H^{1+[\frac{k}{3}],s}$ lorsque $\nu \to 0$, vers une solution u du problème (3.46).

Preuve des Théorèmes 3.6. et 3.7.

Ils résultent par compacité de (3.47) et (3.48).

□

IV - RESUME DES RESULTATS

Ils concernent l'opérateur de Tricomi (Exemple 1 du §.1.4)

$$P_2 \equiv D_2^2 + x_2 D_1^2 \tag{4.1}$$

et sa généralisation naturelle en dimension d'espace et en structure (Exemple 6 du §.1.4)

$$P_2 \equiv D_n^2 + x_n Q_2(x,D') \tag{4.2}$$

Dans (4.2), $Q_2(x,D')$ désigne un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients réels de classe C^1 et de symbole $q_2(x,\xi')$, elliptique en ξ'.
Ces opérateurs peuvent être perturbés par n'importe quel opérateur différentiel d'ordre $\leqslant 1$ à coefficients mesurables et bornés.
Pour l'opérateur de Tricomi, deux types de régularisation parabolique sont considérées :

$$D_2^2 + x_2 D_1^2 + \nu\, d(x_2)(D_1^4 + 2i\, D_1^2 D_2) \tag{4.3}_1$$

où $d(x_2) = 0$ pour $x_2 \geqslant 0$, $d(x_2) = x_2$ pour $x_2 < 0$.

$$D_2^2 + x_2 D_1^2 - \nu\, \theta(x_2)(D_1^4 + 2i\, D_1^2 D_2) \tag{4.3}_2$$

où $\theta(x_2)$ est une fonction C^∞, positive décroissante, plate en $x_2 = 0$ et nulle lorsque $x_2 \geqslant 0$.

La généralisation de $(4.3)_1$ pour l'opérateur (4.2) est définie au §.2.3. Il est perturbé par un opérateur $K_\nu \equiv C_\nu - 2i\, B_\nu\, D_n$ où C_ν et B_ν satisfont les hypothèses (2.31) à (2.34).

De même la généralisation de $(4.3)_2$ est définie au §.2.4, les opérateurs C_ν et B_ν satisfaisant cette fois les hypothèses (2.55) à (2.60).

La Proposition 1.5 du §.1.3 assure l'existence d'une solution du problème limite $P_2 u = f$. L'existence d'une solution du problème perturbé $(P_2+K_\nu)u = f$ est l'objet des Théorèmes 3.4 et 3.5 du §.3.3.

Le problème perturbé approxime le problème limite en un sens précisé par les Théorèmes 3.6 et 3.7 du §.3.3.

Ces résultats s'obtiennent à partir d'inégalités de Carleman puis d'estimations dans les espaces $H^{m,s}$. Les inégalités de Carleman sont l'objet des Propositions 2.2, 2.3 et 2.4 des §.2.3 et 2.4.

Les normes des espaces $H^{m,s}$ sont définies par (3.12) au §.3.1. Les principales estimations dans ces espaces sont alors les inégalités (3.28) du Corollaire 3.1, et (3.37) du Théorème 3.4, énoncées aux §.3.1 et 3.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BITSADZE, Equations of the mixed type. Pergamon Press, New-York, 1964

[2] J. DIEUDONNE, Eléments d'analyse, Tome 8, Gauthier-Villars, Paris 1978.

[3] K.O. FRIEDRICHS, Symmetric positive linear differential equations Comm. Pure Appl. Math. 11 (1958), 333-418.

[4] P. GERMAIN-R.BADER, Sur le problème de Tricomi , Rend. Circ. Palermo, 2 (1953), 53-70.

[5] L. HORMANDER, Linear Partial differential equations (4 ed.) Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[6] L. HÖRMANDER, Pseudo differential operators and non elliptic boundary value problems. Ann. Math. 84 (1966), 129-209.

[7] L. HÖRMANDER, Differential operators of principal type. Math. Ann. 140 (1960), 124-146.

[8] A. JAMESON, Iterative solutions of transonic flows over airfoils and wings including flow at mach 1. Comm. Pure Appl. Math. 27 (174), 283-309.

[9] L. LANDAU, E.LIFCHITZ, Mécanique des fluides, Editions Mir Moscou, 1971.

[10] J.L. LIONS, Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal. Springer Verlag, Berlin, 1978.

[11] C. MORAWETZ, A weak solution for a system of equation of hyperbolic - elliptic type. Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 455-470.

[12] E.M. MURMAN - J.D. COLE, Calculation of plane steady transonic flows. AIAA Journal 8 (1971) 114-121.

[13] J. SJÖSTRAND - R.B. MELROSE, Singularities of boundary value problems I Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 593-617.

[14] F. TREVES, Relations de domination entre opérateurs différentiels, Acta Math. 101 (1959), 1-139.

[15] F. TRICOMI, Equiazoni e derivate parziali éd. Cremonèse, 1957.

[16] A. UNTERBERGER, Pseudo differential operatprs and applications an introduction. Aarhus Universitet Lecture Notes Séries 46 (1976).

[17] C. MORAWETZ, A regularization for a simple model of transonic flow. Comm. in P.D.E. 4 (1979), 79-111.

[18] A. MAJDA - S. OSHER - Numerical viscosity and the entropy condition. Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979), 797-838.

[19] S. OSHER - Non linear singular perturbation problems and one sided difference schemes. Preprint.